

Matrizenmultiplikation und affine Abbildungen.

Ein Kurs zum selbständigen Lernen.

Alexander Ruhri

a.ruhri@widarschule.de

Aktuelle Version unter <http://www.ruhri.net/>

Version 1.1, Mai 2011

Bitte beachten Sie beim Bearbeiten dieser Blätter, dass an geeigneten Stellen Zusammenfassungen mit der ganzen Klasse durchgeführt werden. Bitte machen Sie Ihren Lehrer darauf aufmerksam, wenn Sie das Bedürfnis nach einer solchen Besprechung haben.

1 Matrizenmultiplikation

1.1 Matrix · Vektor

Finden Sie anhand der unten dargestellten Rechnung heraus, wie eine Matrix mit einem Vektor multipliziert wird.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ -\mathbf{3} \\ -\mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \mathbf{2} + 2 \cdot (-\mathbf{3}) + 3 \cdot (-\mathbf{1}) \\ 4 \cdot \mathbf{2} + 5 \cdot (-\mathbf{3}) + 6 \cdot (-\mathbf{1}) \\ 7 \cdot \mathbf{2} + 8 \cdot (-\mathbf{3}) + 9 \cdot (-\mathbf{1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -13 \\ -19 \end{pmatrix}$$

1.) Berechnen Sie:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 8 \\ 9 & 1 & -2 & -7 \\ 5 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

2.) Formulieren Sie eine Bedingung für die Durchführbarkeit der Multiplikation.

3.) Beschreiben sie den Vorgang der Multiplikation in eigenen Worten.

$$\text{4.) Was ist das? } \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

- 5.) Finden Sie eine Matrix, die jeden Vektor auf einen zu ihm orthogonalen Vektor abbildet.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

- 6.) Finden Sie jeweils eine Matrix, die die Gleichung erfüllt:

a) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ 3v_2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 + v_3 \\ v_1 + v_3 \\ 4v_1 + 2v_2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5v_1 + 3v_2 \\ 7v_4 - 2v_3 \\ v_1 - v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

- 7.) Untersuchen Sie, wie die Matrix aussehen muss, damit man den gleichen Vektor wieder als Ergebnis erhält, also $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$ (2-dimensional und 3-dimensional). Eine solche Matrix heißt *Einheitsmatrix*, weil sie wie die 1 in der Multiplikation der Zahlen wirkt.
- 8.) Geben Sie eine Matrix an, die jeden Vektor um das a -fache streckt (2-dim. und 3-dim.).

1.2 Matrix · Matrix

Können Sie das auch rechnen?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Betrachten Sie dazu die zweite Matrix als zwei Spaltenvektoren. Um die erste Spalte des Ergebnisses zu erhalten, führen Sie die Multiplikation mit der ersten Spalte durch (Matrix · Vektor). Für die zweite Spalte des Ergebnisses multiplizieren Sie die erste Matrix mit der zweiten Spalte der zweiten Matrix. Zur Kontrolle: $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 31 & 27 \end{pmatrix}$.

- 1.) Berechnen Sie die Matrizenprodukte!

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -6 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -9 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 11 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

- 2.) Beschreiben Sie, wie Sie die Anzahlen der Spalten und Zeilen im Voraus bestimmen können.

- 3.) Untersuchen Sie, welche Bedingungen die beiden Matrizen erfüllen müssen, damit die Multiplikation durchführbar ist.

- 4.) Gegeben sind ein Spaltenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ und ein Zeilenvektor $\vec{w} = (2 \quad -4 \quad 8)$.

Berechnen Sie mit der Matrizenmultiplikation, aber überlegen Sie *erst*, welche Spalten- und Zeilenanzahlen Sie zu erwarten haben:

a) $\vec{w} \cdot \vec{v} =$

b) $\vec{v} \cdot \vec{w} =$

2 Die geometrische Wirkung der Matrizenmultiplikation: affine Abbildungen

Indem wir Matrizen auf Ortsvektoren von Punkten der Ebene \mathbb{R}^2 anwenden, erhalten wir eine Abbildung der Ebene in sich. Das heißt ein Punkt $A \in \mathbb{R}^2$ wird durch die Matrizenmultiplikation auf einen Punkt $A' \in \mathbb{R}^2$ abgebildet. Im Folgenden seien die Punkte A , B und C wie folgt definiert:

$$A(2|1); \quad B(1|3); \quad C(3|3)$$

- 1.) Untersuchen Sie jeweils die Wirkung der Matrix M auf die Punkte A , B und C . Zeichnen Sie die Punkte und die Bildpunkte $A' = M \cdot A$ und entsprechend B' und C' in ein Koordinatensystem ein.

a) $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

e) $M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

f) $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

- 2.) Berechnen Sie für die Matrix M aus Aufgabe 1f:

$$M^6 = M \cdot \dots \cdot M$$

Welchen Schluss ziehen Sie aus dem Ergebnis?

Wir können diese affinen Abbildungen allgemein folgendermaßen notieren:

$$\alpha : \vec{x}' = M \cdot \vec{x} \quad \text{bzw.} \quad \alpha(\vec{x}) = M \cdot \vec{x},$$

wobei $M \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (M ist eine 2×2 -Matrix) und $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^2$ (2-dimensionaler Vektor).

Da die Abbildung auf jeden Punkt der Ebene angewendet werden kann, spricht man auch von einer Spiegelung, Drehung, Streckung usw. der ganzen Ebene.

3.) Typen von affinen Abbildungen

Untersuchen Sie die folgenden affinen Abbildungen, indem Sie sie z.B. auf das Dreieck ABC anwenden. Bestimmen Sie den Typ der Abbildung (Drehung, Scherung, ...) und zugehörige Parameter (Drehpunkt, Winkel,...)

$$\text{a) } \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\text{d) } \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\text{b) } \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\text{e) } \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\text{c) } \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\text{f) } \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

4.) Zusammengesetzte affine Abbildungen

Die folgenden Abbildungen sind zusammengesetzt. Das heißt, die Ebene wird z.B. zuerst geschert und dann zentrisch gestreckt.

- i) Untersuchen Sie die Abbildungen und finden Sie heraus, welche Transformationen die Abbildung durchführt (z.B. wieder anhand des Dreiecks ABC).
- ii) Überlegen Sie, ob die Transformationen vertauschbar sind.
- iii) Geben Sie Matrizen für die Einzeltransformationen an.
- iv) Bilden Sie das Matrizenprodukt (Achtung, richtige Reihenfolge!) und vergleichen Sie dieses mit der Matrix aus der Abbildung.

$$\text{a) } \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\text{d) } \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\text{b) } \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\text{e) } \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\text{c) } \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\text{f) } \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$