

---

# Zur Ubiquität der Fibonacci-Zahlen

Überarbeitete Version der ersten Staatsarbeit  
vom 19. 1. 2010

Alexander Ruhri

Bochum, im Oktober 2004

Prof. Dr. Uwe Storch

Fakultät für Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Historisches</b>	<b>4</b>
1.1 Leonardo Pisano . . . . .	4
1.2 Die Fibonacci-Zahlen bei anderen Autoren . . . . .	5
1.3 Zusammenfassung . . . . .	6
<b>2 Definition und einfache Eigenschaften</b>	<b>7</b>
2.1 Definition der Fibonacci-Zahlen . . . . .	7
2.2 Einfache Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen . . . . .	8
2.3 Fortsetzung der Fibonacci-Zahlen auf $\mathbb{Z}$ . . . . .	9
<b>3 Der Goldene Schnitt</b>	<b>11</b>
3.1 Einführung . . . . .	11
3.1.1 Geschichte . . . . .	11
3.1.2 Definition . . . . .	12
3.1.3 Grundlegende Eigenschaften von $\Phi$ und $\Phi'$ . . . . .	14
3.2 Die Kettenbruchentwicklungen von $\Phi$ und $\Phi'$ . . . . .	16
3.2.1 Die Fibonacci-Zahlen und die Kettenbruchentwicklung von $\Phi$ . . . . .	17
<b>4 Zahlentheoretische Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen</b>	<b>19</b>
4.1 Teilbarkeit . . . . .	19
4.2 Fibonaccidarstellung . . . . .	22
<b>5 Verallgemeinerung</b>	<b>23</b>
5.1 Lucaszahlen . . . . .	23
5.2 Der Vektorraum der allgemeinen Fibonacci-Folgen . . . . .	23
5.3 Die Binet-Formel . . . . .	25

5.4	Das Verhältnis der Fibonacci-Folge zu allgemeinen Fibonacci-Folgen . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Zahlentheorie und Algebra</b>	<b>28</b>
6.1	Baumstrukturen und Kombinatorik . . . . .	28
6.1.1	Der Fibonacci-Baum . . . . .	29
6.1.2	AVL-Bäume . . . . .	33
6.2	Allgemeine Fibonacci-Folgen und die Pell'sche Gleichung . . . . .	35
6.3	Die Fibonacci-Algebra $\mathbb{Z}[\Phi]$ . . . . .	38
6.4	Periodenlängen von Fibonacci-Folgen modulo $\mathbf{m}$ . . . . .	40
6.4.1	Die Fibonacci-Folge modulo $\mathbf{p}$ . . . . .	42
6.4.2	Die Fibonacci-Folge modulo $\mathbf{p}^\alpha$ . . . . .	44
6.5	Das Pascalsche Dreieck . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Funktionentheorie</b>	<b>50</b>
7.1	Goldener-Schnitt-Suche . . . . .	50
7.1.1	Fibonacci-Suche . . . . .	52
7.2	Affinität zu den hyperbolischen Funktionen . . . . .	53
7.2.1	Die Fibonacci-Funktion . . . . .	55
<b>8</b>	<b>Geometrie</b>	<b>59</b>
8.1	Geometrie und Goldener Schnitt . . . . .	59
8.1.1	Konstruktion des Goldenen Schnittes . . . . .	59
8.1.2	Das goldene Dreieck . . . . .	61
8.1.3	Das Fünfeck . . . . .	62
8.2	Die Fibonacci-Zahlen in der Geometrie: Ein Trugschluss . . . . .	65
<b>9</b>	<b>Außerhalb der Mathematik</b>	<b>67</b>
9.1	Phyllotaxis . . . . .	67
9.2	Elektrische Netzwerke . . . . .	72
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>74</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>76</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>77</b>

# Einleitung

Seit ihrer Entdeckung oder Erfindung Anfang des 13. Jahrhunderts waren und sind die Fibonacci-Zahlen fast immer ein Thema in der Mathematik. Was anfangs als Rechenbeispiel diente, wurde nach und nach, vor allem aber ab dem 19. Jahrhundert, Gegenstand zahlreicher Untersuchungen aus einer wachsenden Vielzahl von Perspektiven. Und nicht nur die Untersuchung der Fibonacci-Folge selbst brachte interessante Ergebnisse, sondern die Fibonacci-Zahlen tauchten auch oft in Zusammenhängen auf, in denen sie nicht vermutet wurden.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen Einblick in die „Allgegenwart“ dieser Zahlenfolge zu geben. Nach einem kurzen geschichtlichen Überblick werden die Fibonacci-Zahlen unter verschiedenen mathematischen Gesichtspunkten behandelt. Der Sache gemäß, findet auch der Goldene Schnitt Eingang in die Arbeit. Im letzten Kapitel werden einige Phänomene, die außerhalb der Mathematik liegen, besprochen werden.

Der Schwerpunkt der Betrachtungen liegt aber innerhalb der Mathematik, wobei sich die Arbeit auch nicht im Sammeln von Phänomenen erschöpfen soll, an denen die Fibonacci-Zahlen beobachtet werden können, sondern es sollen auch einige interessante Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen näher beleuchtet werden.

# Kapitel 1

## Historisches

### 1.1 Leonardo Pisano

Die Benennung der Fibonacci-Zahlen geht auf ihren „Erfinder“ Leonardo Pisano (1170 – 1250) zurück, der den Beinamen *Fibonacci*, die Abkürzung für *filius Bonacci*, Sohn des Bonacci, trug.

Leonardo war der Sohn eines pisanischen Kaufmannes, der ihn in dessen Jugend nach Bougie (Algerien) mitnahm, wo er Notar am Handelshof der pisanischen Kaufleute war. Dort lernte Leonardo das Rechnen mit den indischen Ziffern, was wohl auf einen Wunsch des Vaters zurückging (Lüneburg, 1993, vergl. S. 22). Das indische Zahlensystem wurde von den Arabern übernommen und gelangte aus der arabischen Welt nach Europa. Daher auch der Name „arabische Ziffern“.

Im Jahre 1202 vollendete Leonardo die erste Niederschrift seines *liber abbaci*, der nur mehr in der überarbeiteten Fassung von 1228 erhalten ist. Das Buch diente vor allem als Lehrbuch zur Einführung des indischen Zahlensystems, das ein algorithmisches Rechnen (also ein Rechnen ohne Abakus) ermöglichte. Diese Aufgabe bewältigte das Buch mit großem Erfolg (Pisano, 2002, vergl. S. 4)<sup>1</sup>. Relativ geringen Raum, nämlich etwas weniger als eine Seite der Handschrift<sup>2</sup>, nimmt das allseits bekannte Kaninchenproblem ein, auf das sich die Fibonacci-Zahlen gründen. Es ist nicht mehr als ein Rechenbeispiel, in dem die Nachkommenschaft eines Kaninchenpaares eines Jahres berechnet werden soll.

Auf Seite 123<sup>v</sup> der Handschrift heißt es:

<sup>1</sup> Mehr Informationen zum *liber abbaci* und über das historische Umfeld kann (Lüneburg, 1993) entnommen werden.

<sup>2</sup> vergl. die Farbtafeln 2 und 3 in Lüneburg (1993)

„*Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.*

Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinerentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant.“ (zitiert nach Lucas (1877, S. 5))

In der Folge führt Fibonacci aus, wie sich die Kaninchenpopulation während eines Jahres entwickelt. Ein tabellarischer Überblick über die Entwicklung ist im *liber abbaci* als Marginalie gegeben.

## 1.2 Die Fibonacci-Zahlen bei anderen Autoren

In der Folge tauchen die Fibonacci-Zahlen bei einigen weiteren Autoren auf: Da ist zum Ersten das *Libro di arimeticcha* (1571) von Dionigi Gori, das die Kaninchenaufgabe enthalten soll.

Aus dem gleichen Jahr stammt ein Rechenbüchlein von Simon Jacob, in dem die Fibonacci-Zahlen und ihr Verhältnis zum Goldenen Schnitt auftauchen. Nach Lüneburgs Einschätzung gibt es bei beiden Autoren keine nachweisliche Verbindung zu Fibonacci (Lüneburg, 1993, vergl. S. 230).

Edouard Lucas zitiert Albert Girard (1595 – 1632)<sup>3</sup>, der den Winkel eines Pentagons durch ein gleichschenkliges Dreieck mit Seitenlängen benachbarter Fibonacci-Zahlen approximiert (Lucas, 1877, vergl. S. 6f).

Etwa zur selben Zeit gibt auch Johannes Kepler (1571 – 1630) die Fibonacci-Zahlen als Näherungsfolge für den Goldenen Schnitt an (Kepler, 1939, vergl. S. 164f). Auch bei ihm ist nicht klar, ob der *liber abbaci* als Quelle gedient hatte.

Im 19. Jahrhundert sind neben Lucas vor allem Lamé und Binet als Autoren, die die Fibonacci-Zahlen erwähnen, zu nennen. Lamé stellte 1844 eine Anwendung der Fibonacci-Zahlen zur Bestimmung einer oberen Grenze der Anzahl der Operationen bei der Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen vor. Binet schließlich gelang es, eine geschlossene Formel zur direkten Berechnung einzelner Folgenglieder anzugeben (Lucas, 1877, vergl.

---

<sup>3</sup> Lebensdaten nach Lüneburg (1993, S. 231)

S. 8f).

Lucas (1877) scheint der erste zu sein, der die Zahlenfolge systematischer untersucht und verallgemeinert hat.

### 1.3 Zusammenfassung

Soweit die Quellenlage dies zulässt, kann man die Urheberschaft an den Fibonacci-Zahlen Leonardo Pisano zuschreiben, der sie als Rechenbeispiel in seinem *liber abbaci* (1228) anführt. Der erste dokumentierbare Rückgriff auf Leonardo Pisano wird 1877 von Edouard Lucas gemacht. Bei den Autoren der Zwischenzeit, die diese Zahlenfolge in ihren Werken behandelten, ist eine direkte Verbindung nicht nachweisbar, wie schon Lucas in seinem geschichtlichen Überblick über das Auftauchen der Fibonacci-Zahlen in der mathematischen Literatur abschließend bemerkt: „... mais aucun des auteurs dont nous venons de parler, n'a attribué à Fibonacci l'honneur de la découverte de cette série si remarquable“ (Lucas, 1877, S. 9). Allerdings ist es sehr wahrscheinlich, dass der *liber abbaci* den meisten bekannt war.

Relativ früh (und nicht erst seit Kepler, wie manche Quellen nahelegen) ist auch die Verwendung der Fibonacci-Zahlen zur Approximation des Goldenen Schnittes bekannt.

# Kapitel 2

## Definition und einfache Eigenschaften

Die Struktur, der Inhalt und die Beweisideen dieses Kapitels orientieren sich an Vorob'ev (1961), dessen Einführung in die Fibonacci-Zahlen von praktisch allen nachfolgenden Autoren vorausgesetzt wird. Sofern sich ein Werk mit den Grundlagen der Fibonacci-Zahlen beschäftigt, werden in ihm die meisten der hier wiedergegebenen Sätze abgedruckt sein (vergleiche z. B. Dunlap (1997, S. 35ff) und Vajda (1989)). Allerdings soll nicht unerwähnt bleiben, dass viele der Sätze schon von Lucas zusammengetragen, wenn nicht gar entdeckt wurden (vergl. Lucas (1877)).

### 2.1 Definition der Fibonacci-Zahlen

Wie schon im historischen Teil erwähnt, waren die Fibonacci-Zahlen durch die so genannte Kaninchenaufgabe gegeben. Dabei gibt die  $n$ -te Fibonacci-Zahl die Anzahl der Kaninchenpaare im  $n$ -ten Monat an, wenn zu Beginn des ersten Monats das erste Paar vorhanden ist und jedes Paar ab einem Alter von zwei Monaten jeden Monat ein weiteres Paar gebiert. Die Lebensdauer der Kaninchen wird als unbeschränkt angenommen. Dabei ergibt sich die Anzahl der Paare im  $n$ -ten Monat aus der Anzahl der Paare aus dem Vormonat ( $n-1$ -ter Monat) plus den neuen Paaren, die gleich der Anzahl der Paare vor zwei Monaten ( $n-2$ -ter Monat) ist, da der erste Wurf erst im zweiten Lebensmonat erfolgt.

Die Autoren vor Lucas beginnen die Folge mit  $1, 2, 3, \dots$ , erst Lucas (1877)

definiert die Folge beginnend bei  $0, 1, 1, \dots$  und lässt auch die Indizes mit 0 starten.

Wir definieren die Fibonacci-Zahlen wie folgt:

**Definition 2.1.** Die Zahlen

$$F_n := F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \text{ wobei } F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad (2.1)$$

heißen *Fibonacci-Zahlen*.

Entgegen der auf Lucas zurückgehenden Tradition, die Fibonacci-Zahlen mit  $u_n$  zu bezeichnen, habe ich mich für die heute gebräuchlichere Notation  $F_n$  entschieden.

## 2.2 Einfache Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen

**Satz 2.2.** Die Summe der ersten  $n$  Fibonacci-Zahlen berechnet sich nach folgender Gleichung:

$$\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1. \quad (2.2)$$

*Beweis.* Da  $F_0 = 0$  ist, können wir die Summe bei  $i = 1$  starten lassen. Und da  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ , ist  $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$  und wir schreiben die Summe (2.2) als:

$$\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n F_{i+2} - F_{i+1} = (F_{n+2} - F_{n+1}) + \dots + (F_3 - F_2) + (F_2 - F_1).$$

Wie wir leicht sehen, ist dies eine Teleskopsumme. Da  $F_1 = 1$  ist, erhalten wir das gewünschte Ergebnis.  $\square$

**Satz 2.3.** Die Summe der ersten  $n$  Fibonacci-Zahlen mit ungeradem Index wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}. \quad (2.3)$$

*Beweis.* Wir beweisen den Satz durch Induktion. Für  $n = 1$  gilt  $F_1 = F_2$ . Damit ist der Induktionsanfang gemacht. Wir zeigen also den Induktionsschritt von  $n$  nach  $n + 1$ :

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i-1} = F_{2n} + F_{2(n+1)-1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2(n+1)}.$$

$\square$

**Satz 2.4.** Für die ersten  $n$  Fibonacci-Zahlen mit geradem Index gilt:

$$\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1. \quad (2.4)$$

*Beweis.* Für  $n = 1$  gilt der Satz, denn  $F_2 = 1 = F_3 - 1$ . Für ein allgemeines  $n$  zeigen wir den Übergang zu  $n + 1$  durch folgende Gleichungskette:

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i} = F_{2n+1} - 1 + F_{2(n+1)} = F_{2n+1} + F_{2n+2} - 1 = F_{2(n+1)+1} - 1.$$

□

**Satz 2.5.** Für beliebige  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt:

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}. \quad (2.5)$$

*Beweis.* Wir beweisen den Satz durch Induktion über  $m$ . Für  $m = 0$  gilt:  $F_{n+0} = F_{n-1} \cdot 0 + F_n \cdot 1$ , was offensichtlich richtig ist. Für  $m = 1$  ergibt sich:  $F_{n+1} = F_{n-1} \cdot 1 + F_n \cdot 1$ . Auch das ist richtig. Für ein beliebiges  $m$  gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} F_{n+m-1} &= F_{n-1}F_{m-1} + F_nF_m \\ F_{n+m} &= F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} F_{n+m+1} &= F_{n-1}(F_{m-1} + F_m) + F_n(F_m + F_{m+1}) \\ &= F_{n-1}F_{m+1} + F_nF_{m+2}. \end{aligned}$$

□

## 2.3 Fortsetzung der Fibonacci-Zahlen auf $\mathbb{Z}$

Stellen wir die Definitionsgleichung (2.1) um, erhalten wir nach Umindizierung folgende Form:

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}. \quad (2.6)$$

Daraus ergibt sich:  $F_{-1} = F_1 - F_0 = 1 - 0 = 1$  und  $F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1$ .

Diese Erweiterung der Fibonacci-Zahlen auf  $\mathbb{Z}$  wurde von Lucas (1877, S. 10) eingeführt (vergl. Tabelle 2.1).

**Satz 2.6.** Für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  gilt folgender Zusammenhang zwischen positiven und negativen Indizes:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n. \quad (2.7)$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$F_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
$F_{-n}$	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55	89	-144	233

---

**Tabelle 2.1:** Die ersten 13 Fibonacci-Zahlen mit positivem und negativem Index.

---

*Beweis.* Wir führen den Beweis durch Induktion über  $n$ . Für  $n = 1$  und  $n = 2$  ist der Sachverhalt schon gezeigt worden. Der Fall  $n = 0$  ist trivial.

$$\begin{aligned}
F_{-n} &= F_{-(n-2)} - F_{-(n-1)} && \text{nach (2.6)} \\
&= (-1)^{n-1} F_{n-2} - (-1)^n F_{n-1} && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= (-1)^{n-1} F_{n-2} + (-1)^{n-1} F_{n-1} \\
&= (-1)^{n-1} (F_{n-2} + F_{n-1}) \\
&= (-1)^{n+1} F_n.
\end{aligned}$$

Womit wir das gewünschte Ergebnis erhalten haben. □

# Kapitel 3

## Der Goldene Schnitt

Der Goldene Schnitt steht in enger Verbindung zu den Fibonacci-Zahlen. In einem großen Teil der Literatur werden sie gemeinsam behandelt.

Da einige Sachverhalte, die mit dem Goldenen Schnitt in Zusammenhang stehen, in weiterer Folge benötigt werden, ist dieses Kapitel noch vor der eigentlichen Untersuchung der Fibonacci-Zahlen angesiedelt.

Die Ausführungen in diesem Kapitel folgen im Wesentlichen und sofern nicht anders angegeben Beutelspacher und Petri (1988).

### 3.1 Einführung

#### 3.1.1 Geschichte

Der Goldene Schnitt dürfte schon im fünften Jahrhundert v. Chr. von Hippasos von Metapont im Zusammenhang mit der Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks entdeckt worden sein. Dem Historiker Iamblichos (283 – 330 n. Chr.) zufolge habe dieser „zuerst die aus zwölf Fünfecken zusammengesetzte Kugel öffentlich beschrieben und sei deshalb als ein Gottloser im Meere umgekommen“ (Beutelspacher, 1988, S. 44).

Die Teilung einer Strecke „nach dem äußeren und mittleren Verhältnis“ findet ihre erste schriftliche Erwähnung bei Euklid (356 – 300 v. Chr.). Im zweiten Buch der Elemente heißt es in Satz 11:

„Eine gegebene Strecke [sei] so zu teilen, daß das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.“ (zitiert nach Beutelspacher (1988, S. 15))

Ohne auf diesen Satz Bezug zu nehmen, wird die Teilung in der dritten Definition des sechsten Buches erklärt:

„Eine Strecke heißt nach dem äußeren und mittleren Verhältnis geteilt, wenn sich der größere Abschnitt zum kleineren, wie die ganze Strecke zum größeren verhält.“ (Zitiert nach Tropfke (1940, S. 244))

Diese Definition ist die auch heute noch gebräuchliche.

In der deutschen Euklid-Ausgabe von Lorenz (1781) wird der „Schnitt nach dem äußeren und mittleren Verhältnis“ als „stetige Teilung“ wiedergegeben. Erst im neunzehnten Jahrhundert tauchte die Bezeichnung „Goldener Schnitt“ auf, als Keplers „phantastische Anschauungen“ eine Renaissance erlebten (Vergl. Tropfke (1940, S. 245f)).

### 3.1.2 Definition

**Definition 3.1** (Goldener Schnitt). Sei  $\overline{AB}$  eine Strecke der Länge  $a$  und  $S$  ein Punkt auf  $\overline{AB}$ . Es sei weiter  $M$  die Länge der Teilstrecke  $\overline{AS}$  und  $m$  die Länge von  $\overline{SB}$  und es gelte  $M > m > 0$ .

Genau dann teilt  $S$  die Strecke  $\overline{AB}$  im Goldenen Schnitt, wenn folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\frac{a}{M} = \frac{M}{m} \quad (3.1)$$

$M$  bezeichnet dabei den *Major* (den größeren Teil) und  $m$  den *Minor* (den kleineren Teil) der Teilung.




---

**Abbildung 3.1:** Teilung einer Strecke im Goldenen Schnitt: Der Punkt  $S$  teilt die Strecke  $\overline{AB}$  im Goldenen Schnitt. Die dadurch entstandenen Teilstrecken  $M$  und  $m$  heißen *Major* und *Minor*.

---

Setzt man, nach Multiplizieren der Gleichung (3.1) mit  $M$  und  $m$ ,  $a = M + m$

in diese Gleichung ein, so erhält man:

$$am = M^2 \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (M+m)m &= M^2 && (a = M+m) \\ \Leftrightarrow \frac{M}{m} + 1 &= \left(\frac{M}{m}\right)^2 && (\text{teilen durch } m^2) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{M}{m} - 1 &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Wir erhalten also für  $x = \frac{M}{m}$  die quadratische Gleichung  $x^2 - x - 1 = 0$  mit den Lösungen

$$\Phi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874989 \tag{3.4}$$

und

$$\Phi' := \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,61803398874989. \tag{3.5}$$

Für die geometrische Problemstellung kann die negative Lösung ausgeschlossen werden, da  $M$  und  $m$  positiv sind. Für unsere etwas allgemeineren Betrachtungen können wir von dieser Beschränkung absehen.

Die Zahl  $\Phi$  beschreibt somit das Verhältnis der Längen von Major und Minor, sowie das Verhältnis der Längen von ganzer Strecke und Major. Das entspricht der Definition nach Euklid im sechsten Buch.

Die Gleichung (3.2) verdeutlicht die Äquivalenz zur Definition nach dem elften Satz im zweiten Buch der Elemente (s. S. 11).

Die Bezeichnung  $\Phi$  soll an den griechischen Bildhauer Phidias (ca. 460 – 430 v. Chr.) erinnern, in dessen Werken dieses Maßverhältnis auftaucht, jedoch ist auch  $\varphi$  oder  $\tau$  üblich. Um die Bedeutung des Zeichens als Konstante hervor zu heben, folge ich dem Vorschlag von Beutelspacher (1988) und verwende den Großbuchstaben  $\Phi$ .

Beutelspacher (1988, S. 18) weist darauf hin, dass neben der Konstanten  $\Phi$  mit dem Begriff „Goldener Schnitt“ sowohl der „Vorgang der Teilung“ einer Strecke, als auch der Teilungspunkt gemeint sein kann.

Oft wird auch  $\Phi^{-1}$  der Goldene Schnitt genannt. Wir wollen diese Zahl zur Unterscheidung von  $\Phi$  den *inneren* Goldenen Schnitt nennen.

Eine genauere Dezimaldarstellung von  $\Phi$  findet man im Internet unter <http://www.cs.arizona.edu/icon/oddsends/phi.htm>. Auf dieser Seite sind die ersten 50000 Stellen der Dezimaldarstellung von  $\Phi$  nachzulesen.

### 3.1.3 Grundlegende Eigenschaften von $\Phi$ und $\Phi'$

#### Die Potenzen von $\Phi$ und $\Phi'$

Wir betrachten die Potenzen von  $\Phi$  und  $\Phi'$ . Aus (3.3) folgt direkt:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad \text{bzw.} \quad \Phi'^2 = \Phi' + 1. \quad (3.6)$$

Multipliziert man (3.6) mit  $\Phi$  bzw.  $\Phi'$ , so ergibt sich:

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi \quad \text{bzw.} \quad \Phi'^3 = \Phi'^2 + \Phi'$$

und mit (3.6) folgt weiter:

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1 \quad \text{bzw.} \quad \Phi'^3 = 2\Phi' + 1.$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (3.6) mit  $\frac{1}{\Phi}$  bzw.  $\frac{1}{\Phi'}$  erhalten wir:

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi^{-1} = \Phi - 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\Phi'} = \Phi'^{-1} = \Phi' - 1. \quad (3.7)$$

Allgemein gilt folgender

**Satz 3.2.** Für  $n \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}. \quad (3.8)$$

*Beweis.* Wir beweisen den Satz zuerst für positive  $n$ : Der Anfang für einen Induktionsbeweis ist für  $n = 1$  trivial und für  $n = 2$  mit (3.6) schon gemacht.

Für den Induktionsschritt betrachte man:

$$\begin{aligned} \Phi^{n+1} &= \Phi \Phi^n \\ &= \Phi(F_n \Phi + F_{n-1}) && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= F_n \Phi^2 + F_{n-1} \Phi \\ &= F_n(\Phi + 1) + F_{n-1} \Phi && \text{mit (3.6)} \\ &= F_{n+1} \Phi + F_n && \text{nach der Definition von } F_n. \end{aligned}$$

Womit die Aussage für positive  $n$  bewiesen ist.

Für  $n = 0$  gilt:

$$1 = \Phi^0 = 0\Phi + 1 = 1.$$

Zusammen mit (3.7) ist also der Induktionsanfang für  $n \leq 0$  gemacht. Sei also  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \leq 0$ :

$$\begin{aligned}
\Phi^{n-1} &= \Phi^{-1}\Phi^n \\
&= (\Phi - 1)(F_n\Phi + F_{n-1}) && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= F_n\Phi + F_n + F_{n-1}\Phi - F_n\Phi - F_{n-1} && \text{mit (3.6)} \\
&= F_{n-1}\Phi + F_n - F_{n-1} \\
&= F_{n-1}\Phi + F_{n-2}.
\end{aligned}$$

Also gilt der Satz auch für nichtpositive  $n$ . □

**Bemerkung.** Wie leicht zu sehen ist, gilt dieser Satz auch für  $\Phi'$ , da wir zum Beweis nur die für  $\Phi$  und  $\Phi'$  gemeinsame Bedingung (3.3) benötigt haben.

**Satz 3.3.** (Lahr, 1981, S. 19) Für die Potenzen von  $\Phi$  gilt folgende Rekursionsbeziehung:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

*Beweis.* Durch Umformen erhalten wir:

$$\Phi^{n-2}(\Phi^2 - \Phi - 1) = 0.$$

Was offensichtlich richtig ist. □

**Bemerkung.** Statt  $\Phi$  können wir auch hier  $\Phi'$  schreiben, da  $\Phi'$  die 2. Lösung von  $x^2 - x - 1 = 0$  ist.

**Korollar 3.4.** Da  $\Phi$  positiv ist, gilt:

$$\Phi^x = \Phi^{x-1} + \Phi^{x-2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

### Aspekt der Reziprozität

Diese Benennung der im Folgenden untersuchten Beziehung zwischen  $\Phi$  und  $\Phi'$  stammt von Lahr (1981, S. 21f).

Zwischen  $\Phi$  und  $\Phi'$  gilt folgende Beziehung:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} \cdot \frac{(1 - \sqrt{5})}{(1 - \sqrt{5})} = \frac{1 - 5}{2 - 2\sqrt{5}} = \frac{-2}{1 - \sqrt{5}} = -\frac{1}{\Phi'}$$

Und mit (3.7) ergibt sich:

$$\Phi = 1 - \Phi'. \quad (3.11)$$

Anders ausgedrückt, ergibt diese Beziehung den nächsten Satz:

**Satz 3.5** (Aspekt der Reziprozität).

$$\Phi\Phi' = -1 \quad (3.12)$$

Es ist oft von Vorteil, wenn die Potenzen von  $\Phi'$  in einem linearen Ausdruck mit  $\Phi$  dargestellt werden können. Der nächste Satz bietet eine solche Möglichkeit an.

**Satz 3.6.** Für  $n \in \mathbb{Z}$  gilt folgende Gleichung :

$$\Phi'^n = F_{n+1} - F_n\Phi. \quad (3.13)$$

*Beweis.* Für  $n = 0$  ist die Rechnung trivial. Der Fall  $n = 1$  folgt mit der Gleichung (3.7) für  $\Phi$ . Sei also  $n \in \mathbb{N}$  beliebig:

$$\begin{aligned} \Phi'^{n+1} &= \Phi'^n\Phi' \\ &= F_{n+1}\Phi' - F_n\Phi\Phi' && \text{nach Voraussetzung} \\ &= F_{n+1}(1 - \Phi) + F_n && \text{mit (3.11) und (3.12)} \\ &= F_{n+1} + F_n - F_{n+1}\Phi \\ &= F_{n+2} - F_{n+1}\Phi. \end{aligned}$$

Für nichtpositive  $n$  folgt der Fall  $n = -1$  aus (3.12):  $\Phi'^{-1} = -\Phi$ . Sei also  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \leq 0$ :

$$\begin{aligned} \Phi'^{n-1} &= \Phi'^n\Phi'^{-1} = F_{n+1}\Phi'^{-1} - F_n\Phi\Phi'^{-1} \\ &= F_{n+1}(\Phi' - 1) - F_n\Phi(\Phi' - 1) && \text{nach (3.7)} \\ &= -F_{n+1}\Phi + F_n(\Phi + 1) && \text{mit (3.11)} \\ &= F_n - F_{n-1}\Phi. \end{aligned}$$

□

## 3.2 Die Kettenbruchentwicklungen von $\Phi$ und $\Phi'$

Wir betrachten wieder die Gleichung (3.3)  $x^2 - x - 1 = 0$  und schreiben sie in folgender Form:

$$x(x - 1) = 1. \quad (3.14)$$

Durch Umformen bekommen wir die Form  $x = 1 + \frac{1}{x}$ . Das  $x$  im Nenner kann durch den Term der rechten Seite ersetzt werden:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

Durch wiederholtes Anwenden erhalten wir folgenden Kettenbruch:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Da dieser Kettenbruch positiv ist, stellt er die Entwicklung für  $\Phi$  dar. Teilen wir (3.14) durch  $(x - 1)$ , so erhalten wir die Gleichung in der Form  $x = -\frac{1}{1-x}$  und daraus die Kettenbruchentwicklung für  $\Phi'$ :

$$\Phi' = -\frac{1}{1 + \frac{1}{1-x}} = -\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Für einen Kettenbruch der Form

$$x = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

ist die Notation

$$x = [q_0, q_1, \dots]$$

üblich. Es ist also

$$\Phi = [1, 1, 1, \dots]$$

$$\Phi' = [0, -1, 1, 1, \dots].$$

### 3.2.1 Die Fibonacci-Zahlen und die Kettenbruchentwicklung von $\Phi$

Wir betrachten nun das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

Durch wiederholtes Anwenden und mit  $F_1 = F_2 = 1$  erhalten wir schließlich:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots 1 + \frac{1}{1}}}$$

Nach  $F_1$  bricht der Kettenbruch ab, da sonst beim Bilden des Kehrwertes von  $\frac{F_0}{F_1}$  eine Division durch 0 aufträte.

Für  $n \rightarrow \infty$  erhält man den unendlichen Kettenbruch:

$$z = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Und es gilt  $z = 1 + \frac{1}{z}$ , das heißt:  $z^2 - z - 1 = 0$ . Da weiter  $z > 0$  gilt, erhalten wir:  $z = \Phi$ .

Dies liefert den Beweis für

**Satz 3.7.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi \quad (3.15)$$

**Korollar 3.8.** Mithilfe von Satz 2.6 und dem Aspekt der Reziprozität folgt sofort:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi' \quad (3.16)$$

Mit dieser kurzen Einführung ist der Goldene Schnitt natürlich nicht erschöpfend behandelt. Er wird allerdings im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch öfter auftreten. Einige geometrische Gesichtspunkte des Goldenen Schnittes, wie zum Beispiel seine Konstruktion mit Zirkel und Lineal werden in Abschnitt 8.1 vorgestellt.

# Kapitel 4

## Zahlentheoretische Eigenschaften der Fibonacci- Zahlen

### 4.1 Teilbarkeit

**Satz 4.1.** *Seien  $n, m \in \mathbb{N}$ . Falls  $n$  durch  $m$  teilbar ist, so ist auch  $F_n$  durch  $F_m$  teilbar.*

*Beweis.* Aus  $m \mid n$  folgt  $n = mc$  für ein  $c \in \mathbb{N}$ . Wir führen den Beweis durch Induktion über  $c$ .

Sei also  $c = 1$ . Dann ist  $m = n$  und die Aussage ist trivial. Wir betrachten nun  $F_{m(c+1)} = F_{mc+m}$  und es gilt mit Satz 2.5:

$$F_{mc+m} = F_{mc-1}F_m + F_{mc}F_{m+1}. \quad (4.1)$$

$F_{mc-1}F_m$  ist trivialerweise durch  $F_m$  teilbar.  $F_m$  teilt  $F_{mc}$  nach Induktionsvoraussetzung. Somit gilt:  $F_m \mid F_{mc+m}$ . □

**Satz 4.2.** *Benachbarte Fibonacci-Zahlen sind teilerfremd.*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $d > 1$  ein gemeinsamer Teiler von  $F_n$  und  $F_{n+1}$  sei, dann hat auch die Differenz  $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$  diesen Teiler  $d$ . Durch Fortsetzen der Differenzbildung kommen wir zu dem Schluss, dass auch  $F_1 = 1$  von  $d$  geteilt wird. Da  $d > 1$ , führt dies zum Widerspruch und es folgt die Behauptung. □

**Satz 4.3.** Für beliebige  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\text{ggT}(F_m, F_n) = F_{\text{ggT}(m,n)}. \quad (4.2)$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei  $m > n$ . Wir wenden den Euklidischen Algorithmus auf  $m$  und  $n$  an:

$$\begin{aligned} m &= nq_0 + r_1, & \text{mit } 0 < r_1 < n, & \quad (4.3) \\ n &= r_1q_1 + r_2, & \text{mit } 0 < r_2 < r_1, & \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3, & \text{mit } 0 < r_3 < r_2, & \\ & \vdots & & \\ r_{t-2} &= r_{t-1}q_{t-1} + r_t, & \text{mit } 0 < r_t < r_{t-1}, & \\ r_{t-1} &= r_tq_t. & & \end{aligned}$$

Also ist  $r_t$  der größte gemeinsame Teiler von  $m$  und  $n$ . Mit (4.3) können wir

$$\text{ggT}(F_m, F_n) = \text{ggT}(F_{nq_0+r_1}, F_n)$$

schreiben. Mit Satz 2.5 folgt:

$$\text{ggT}(F_m, F_n) = \text{ggT}(F_{nq_0-1}F_{r_1} + F_{nq_0}F_{r_1+1}, F_n).$$

Da  $F_{nq_0}$  durch  $F_n$  geteilt wird (Satz 4.1), und  $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a + c, b)$ , falls  $c$  von  $b$  geteilt wird, gilt:

$$\text{ggT}(F_m, F_n) = \text{ggT}(F_{nq_0-1}F_{r_1}, F_n).$$

$F_n$  ist ein Teiler von  $F_{nq_0}$  (Satz 4.1) und ist somit teilerfremd zu  $F_{nq_0-1}$  (Satz 4.2). Aus der Tatsache, dass  $\text{ggT}(a, bc) = \text{ggT}(a, b)$ , falls  $\text{ggT}(a, c) = 1$ , folgt:

$$\text{ggT}(F_m, F_n) = \text{ggT}(F_{r_1}, F_n).$$

In ähnlicher Weise zeigt man, dass

$$\begin{aligned} \text{ggT}(F_{r_1}, F_n) &= \text{ggT}(F_{r_2}, F_{r_1}) \\ \text{ggT}(F_{r_2}, F_{r_1}) &= \text{ggT}(F_{r_3}, F_{r_2}) \\ & \vdots \\ \text{ggT}(F_{r_{t-1}}, F_{r_{t-2}}) &= \text{ggT}(F_{r_t}, F_{r_{t-1}}). \end{aligned}$$

Zusammengefasst, erhalten wir:

$$\text{ggT}(F_m, F_n) = \text{ggT}(F_{r_t}, F_{r_{t-1}}). \quad (4.4)$$

Da aber  $r_{t-1}$  von  $r_t$  geteilt wird, gilt auch  $F_{r_t} \mid F_{r_{t-1}}$  und  $\text{ggT}(F_{r_t}, F_{r_{t-1}}) = F_{r_t}$ . Mit  $r_t = \text{ggT}(m, n)$  folgt die Behauptung.  $\square$

Falls nun  $F_n$  von  $F_m$  geteilt wird, ist  $\text{ggT}(F_n, F_m) = F_m$ . Da aber, wie gerade gezeigt  $\text{ggT}(F_n, F_m) = F_{\text{ggT}(n, m)}$ , folgt  $m = \text{ggT}(n, m)$  und  $m \mid n$ . Zusammengefasst, erhalten wir folgendes Lemma:

**Lemma 4.4.** *Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt:*

$$F_n \mid F_m \Leftrightarrow n \mid m. \quad (4.5)$$

**Bemerkung.** Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Falls es eine Fibonacci-Zahl  $F_n$  gibt, die von  $m$  geteilt wird, so lassen sich beliebig viele weitere Fibonacci-Zahlen finden die von  $m$  geteilt werden, nämlich  $F_{in}$  für  $i = 2, 3, \dots$

Falls  $F_n$  das kleinste Vielfache von  $m$  unter den Fibonacci-Zahlen ist, so sind wegen Satz 4.4 die  $F_{in}$  mit  $i \in \mathbb{N}$  alle Vielfachen von  $m$  in der Folge der Fibonacci-Zahlen.

Dass zu jeder natürlichen Zahl ein Vielfaches in der Folge der Fibonacci-Zahlen existiert, besagt folgender Satz:

**Satz 4.5.** *Für jedes  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$  gibt es mindestens ein  $F_n$ ,  $n \leq m^2$ , das durch  $m$  teilbar ist.*

*Beweis.* Wir betrachten die Reste der  $F_n$  bei der Division durch  $m$ , die wir mit  $[F_n]_m$  bezeichnen, und falls klar ist um welchen Divisor es sich handelt, mit  $[F_n]$  notieren. Wir betrachten nun die Folge von Paaren benachbarter Reste, von denen es höchstens  $m^2$  unterschiedliche gibt:

$$([F_1], [F_2]), ([F_2], [F_3]), \dots, ([F_t], [F_{t+1}]), \dots \quad (4.6)$$

Wir bemerken noch, dass das triviale Paar  $(0, 0)$  wegen Satz 4.2 nicht auftreten kann. Also muss innerhalb der ersten  $m^2$  solcher Paare eine Wiederholung auftreten. Das erste sich wiederholende Paar muss  $(0, 1)$  sein. Denn falls  $([F_k], [F_{k+1}])$  mit  $k > 0$  das erste Paar wäre, das sich wiederholt, und  $([F_l], [F_{l+1}])$  mit  $l > k$  eine Wiederholung dieses Paares wäre, dann würde wegen der Definition 2.1  $([F_{k-1}], [F_k]) = ([F_{l-1}], [F_l])$  gelten und  $([F_k], [F_{k+1}])$  wäre nicht das erste Paar, das sich wiederholt. Also ist  $(0, 1)$  das erste sich wiederholende Paar von Resten. Sei nun die erste Wiederholung an der  $t$ -ten Stelle, dann ist  $F_t$  ein Vielfaches von  $m$ .<sup>1</sup>  $\square$

<sup>1</sup> Die Beweisidee ist Vorob'ev (1961, S. 33f) und Vajda (1989, S. 88) entnommen.

## 4.2 Fibonaccidarstellung

Es ist möglich, alle positiven natürlichen Zahlen als Summe von paarweise nicht benachbarten, unterschiedlichen Fibonacci-Zahlen vom Index größer als 1 in eindeutiger Weise darzustellen (Vajda, 1989, S. 108ff).

**Satz 4.6** (Zeckendorf). *Jede natürliche Zahl  $N$  kann als Summe unterschiedlicher Fibonaccizahlen dargestellt werden:*

$$N = \sum_{i=1}^r F_{k_i} \quad (4.7)$$

wobei gilt:

- (i)  $k_{i+1} \leq k_i - 2, \quad i = 1, 2, \dots, r - 1,$
- (ii)  $k_r \geq 2.$

Diese Fibonacci-Darstellung natürlicher Zahlen heißt kanonische Darstellung.

*Beweis.* Falls  $N$  selbst eine Fibonacci-Zahl ist, also  $N = 1, N = 2$  oder  $N = 3$ , dann gilt obige Aussage. Auch für  $N = 4 = F_4 + F_2$  ist der Satz wahr. Wir können also annehmen, dass er für alle positiven natürlichen Zahlen kleiner gleich  $F_n$  gilt. Sei nun  $F_{n+1} > N > F_n$ . Dann ist aber  $N = F_n + (N - F_n)$ . Da  $N - F_n < F_{n-1}$ , gibt es für  $N - F_n$  eine solche Darstellung, also auch für  $N$ .  $\square$

**Satz 4.7** (Lekkerkerker, 1952). *Die kanonische Darstellung ist eindeutig.*

*Beweis.* Für den Beweis nehmen wir an, dass  $F_n < N < F_{n+1}$  ( $n > 2$ ). Dann muss  $F_n$  in der kanonischen Darstellung vorkommen, denn sollte  $F_n$  kein Summand der Darstellung sein, so ist jede Summe von Fibonacci-Zahlen, die (i) und (ii) erfüllt kleiner als  $N$ . Denn falls  $n = 2k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ , so ist wegen Satz 2.3

$$\sum_{i=2}^k F_{2i-1} = F_{2k} - 1 = F_n - 1 < N.$$

Und falls  $n = 2k + 1$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ , gilt analog nach Satz 2.4

$$\sum_{i=2}^k F_{2i} = F_{2k+1} - 1 = F_n - 1 < N.$$

Also ist  $F_n$  Summand der kanonischen Darstellung. Wegen  $0 < N - F_n < F_{n-1}$  ist  $F_{n-1}$  nicht in der Darstellung enthalten und (i) bleibt gewahrt. Somit ist der Satz durch Induktion über  $n$  bewiesen.  $\square$

# Kapitel 5

## Verallgemeinerung

In diesem Kapitel werde ich den Begriff der Fibonacci-Zahlen verallgemeinern. Diese Verallgemeinerungen gehen im Wesentlichen auf Lucas (1877) zurück.

### 5.1 Lucaszahlen

In §2 seiner Abhandlung über die Fibonacci-Zahlen schlägt Lucas (1877, S. 10f) vor, unter Beibehaltung der Rekursionsvorschrift (2.1), die Startwerte der Folge zu ändern und so weitere Folgen zu erhalten. Lucas weist sofort darauf hin, dass Folgen mit den Startwerten 0 und  $x$  ( $x \in \mathbb{R}$  beliebig) nur die mit  $x$  multiplizierte Fibonacci-Folge sind.

Dem Vorschlag von Vajda (1989, S. 10) folgend, nennen wir solche Folgen *allgemeine* oder *verallgemeinerte* Fibonacci-Folgen (generalized Fibonacci sequence) und bezeichnen sie mit  $G_n$ .

Die allgemeine Fibonacci-Folge mit den Startwerten 2 und 1 wird von Lucas (1877, S. 27) eingeführt. Diese Folge heißt Lucas-Folge und wird mit  $L_n$  bezeichnet.

Die ersten Lucas-Zahlen lauten: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123

### 5.2 Der Vektorraum der allgemeinen Fibonacci-Folgen

Wir betrachten nun einen Automorphismus von  $\mathbb{R}^2$   $A$ , der folgendermaßen definiert ist:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Wie man durch Nachrechnen leicht erkennen kann, gilt

$$A \cdot \begin{pmatrix} G_n \\ G_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{n+1} \\ G_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Aufgrund dieser Eigenschaft nennen wir  $A$  die *Fibonacci-Matrix*. Durch  $n$ -faches Anwenden auf den Startvektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  erhalten wir den Vektor mit der  $n$ -ten und  $n + 1$ -ten Fibonacci-Zahl:

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Allgemein führen wir folgende Schreibweise ein:

$$\mathfrak{G}_n := \begin{pmatrix} G_n \\ G_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Und wie wir schon gesehen haben, gilt

$$\mathfrak{G}_{n+1} = A \cdot \mathfrak{G}_n, \quad (5.3)$$

und durch mehrfaches Anwenden erhalten wir

$$\mathfrak{G}_{n+m} = A^n \cdot \mathfrak{G}_m. \quad (5.4)$$

Als Spezialfall folgt dann

$$\mathfrak{G}_n = A^n \cdot \mathfrak{G}_0. \quad (5.5)$$

Die inverse Fibonacci-Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

entspricht der Gleichung (2.6) und ermöglicht das „Zurückschreiten“ in der Fibonacci-Folge.

Wir können nun mit  $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0$  den Startvektor einer allgemeinen Fibonacci-Folge mit der Folge selbst identifizieren. Zwei Folgen  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  können mit der normalen Vektoraddition addiert werden:

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{H} = \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 + H_0 \\ G_1 + H_1 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Aus der Rekursionsvorschrift der (2.1) folgt, dass die Glieder der resultierenden Folge die Summen der Glieder von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  sind.

Auf gleiche Weise ist die Multiplikation einer Folge mit einer reellen Zahl definiert:

$$x \cdot \mathfrak{G} = \begin{pmatrix} x \cdot G_0 \\ x \cdot G_1 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

**Satz 5.1.** *Die allgemeinen Fibonacci-Folgen bilden einen zweidimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.*

### 5.3 Die Binet-Formel

Die Binetformel eignet sich, um Folgenglieder einer allgemeinen Fibonacci-Folge direkt auszurechnen. Um die Binetformel herzuleiten, berechnen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $A$ . Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von  $A$ :

$$\chi_A := \det(A - XE). \quad (5.9)$$

Wobei  $E$  die Einheitsmatrix ist. Konkret erhalten wir  $\chi_A = X^2 - X - 1$ . Die Nullstellen dieses Polynoms kennen wir bereits:  $\Phi$  und  $\Phi'$ .

Für einen Eigenwert  $x$  errechnet sich der zugehörige Eigenvektor  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  durch Lösen der Gleichung:

$$(A - xE)v = 0. \quad (5.10)$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$-xv_1 + v_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = v_1x, \quad (5.11)$$

$$v_1 + v_2 - v_2x = 0. \quad (5.12)$$

Durch Einsetzen von (5.11) in (5.12) und Ausklammern von  $v_1$  erhalten wir für (5.12) folgende Form:  $-v_1(x^2 - x - 1) = 0$ . Da für  $x$  nur  $\Phi$  und  $\Phi'$  eingesetzt werden, können wir  $v_1 = 1$  setzen. Mit (5.11) erhalten wir dann die beiden Eigenvektoren zu  $\Phi$  und  $\Phi'$ :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi' \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer paarweise orthogonal und linear unabhängig. Daher bilden  $E_1$  und  $E_2$  eine Orthogonalbasis für  $\mathbb{R}^2$ . Also gibt es zu jedem  $v \in \mathbb{R}^2$   $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , sodass  $v = c_1E_1 + c_2E_2$ . Außerdem

gilt für jeden Eigenwert  $x$  einer Matrix  $A$  und seinen zugehörigen Eigenvektor  $v$  die Beziehung:

$$Av = xv.$$

Insgesamt erhalten wir also für einen Startwert  $\mathfrak{G}_0$  einer allgemeinen Fibonacci-Folge:

$$\mathfrak{G}_n = A^n \mathfrak{G}_0 = c_1 \Phi^n E_1 + c_2 \Phi'^n E_2. \quad (5.13)$$

$c_1$  und  $c_2$  errechnet man durch Lösen der Gleichung

$$\mathfrak{G}_0 = c_1 E_1 + c_2 E_2. \quad (5.14)$$

Im Allgemeinen ist eine skalare Schreibweise der Formel völlig ausreichend. Wir erhalten die skalare Form der Binetformel, indem wir nur die jeweils erste Komponente betrachten:

$$G_n = c_1 \Phi^n + c_2 \Phi'^n. \quad (5.15)$$

**Beispiel 5.2.** Die Fibonacci-Zahlen haben die Startwerte 0 und 1. Also ist  $\mathfrak{F}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Wir erhalten also  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$  und  $c_2 = -c_1$ . Die Binetformel hat für die Fibonacci-Zahlen also die Form:

$$\mathfrak{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^n E_1 - \Phi'^n E_2). \quad (5.16)$$

Die übliche und bekanntere Schreibweise der Binetformel ist die skalare Form:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^n - \Phi'^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad (5.17)$$

**Beispiel 5.3.** Für die Lucas-Zahlen mit den Startwerten 2 und 1 ist  $\mathfrak{L}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Und wir errechnen  $c_1 = c_2 = 1$ , woraus sich für die skalare Form der Binetformel folgende Gleichung ergibt:

$$L_n = \Phi^n + \Phi'^n. \quad (5.18)$$

## 5.4 Das Verhältnis der Fibonacci-Folge zu allgemeinen Fibonacci-Folgen

Wir betrachten die Potenzen der Fibonacci-Matrix  $A$ .

**Satz 5.4.** Für  $n \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

*Beweis.* Für  $n = 0, 1, -1$  kann der Satz nach (5.1), (5.6) und  $A^0 = A^1 \cdot A^{-1}$  (Einheitsmatrix) leicht überprüft werden. Für positive  $n$  ist der Satz mit

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} + F_n \\ F_{n+1} & F_n + F_{n+1} \end{pmatrix}$$

gezeigt. Für negative  $n$  folgt die Behauptung durch  $A^{n-1} = A^n \cdot A^{-1}$ .  $\square$

**Korollar 5.5.** Wir können nun die allgemeinen Fibonacci-Zahlen durch die ursprünglichen ausdrücken. Mit der Gleichung (5.5) erhalten wir folgendes Verhältnis:

$$G_n = G_0 F_{n-1} + G_1 F_n. \quad (5.20)$$

Mithilfe der Gleichung (5.4) erhalten wir allgemeiner:

$$G_{m+n} = G_m F_{n-1} + G_{m+1} F_n. \quad (5.21)$$

**Beispiel 5.6.** Für die Lucas-Zahlen gilt demnach die Gleichung

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \quad (5.22)$$

die äquivalent ist zu:

$$L_n = 2F_{n+1} - F_n. \quad (5.23)$$

Aus diesen Ergebnissen können wir folgern, dass

$$A^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} G_0 & G_1 \\ G_1 & G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{n-1} & G_n \\ G_n & G_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

**Satz 5.7.** Für allgemeine Fibonacci-Folgen gilt folgende Beziehung:

$$G_n^2 - G_{n-1}G_{n+1} = (G_1^2 - G_0G_2) (-1)^{n-1}. \quad (5.25)$$

*Beweis.* Wir erhalten das gewünschte Ergebnis sofort, wenn wir in Gleichung (5.24) links und rechts die Determinante bilden. Dabei gilt  $\det(A) = -1$ . Wegen des Determinanten-Multiplikationssatzes ist  $\det(A^{n-1}) = (-1)^{n-1}$ .  $\square$

**Beispiel 5.8.** Für die Fibonacci-Zahlen gilt also:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}. \quad (5.26)$$

Dies ist die so genannte *Simpson-Identität* (Beutelspacher, 1988, S. 93). Für die Lucas-Zahlen gilt entsprechend:

$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5(-1)^n.$$

Satz 5.7 findet vor allem in algebraischen Anwendungen Verwendung. Vor allem beim Finden von Lösungen der Pell'schen Gleichung (vergl. Abschnitt 6.2) ist er hilfreich.

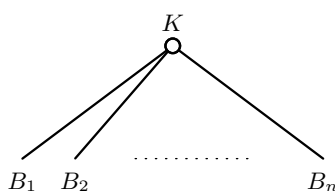
# Kapitel 6

## Zahlentheorie und Algebra

### 6.1 Baumstrukturen und Kombinatorik

Baumstrukturen finden sowohl in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Darstellung von kombinatorischen Sachverhalten, wie auch in der Informatik als Datenstruktur reichlich Anwendung. Ich werde hier einige spezielle Anwendungen solcher Baumdiagramme, die mit den Fibonacci-Zahlen in Bezug stehen, vorstellen. Einige Sätze und Teile der Definition sind aus dem Duden Informatik (DudInf, 1993, S. 58ff) und aus Gütig und Dieker (2003, Kap. 3.5 und 4.2) entnommen. Für die Definition greifen wir auf die Graphentheorie zurück.

**Definition 6.1.** Ein *Baum* ist ein zusammenhängender azyklischer Graph mit gerichteten Kanten.<sup>1</sup>



---

**Abbildung 6.1:** Einfache Baumstruktur mit Knoten  $K$  und den Unterbäumen  $B_i$ .

---

Der Knoten ohne eingehende Kanten heißt *Wurzel*, die Knoten ohne ausgehende Kanten heißen *Blätter*. Alle Knoten, die keine Blätter sind, heißen *innere Knoten*. Geht eine Kante von einem Knoten  $K_V$  zu einem Knoten  $K_S$ , so heißt  $K_V$  der *Vater* von  $K_S$  und  $K_S$  der *Sohn* von  $K_V$ . Die Söhne des gleichen

---

<sup>1</sup> Vergl. die Artikel „Graph (Graphentheorie)“ und „Baum (Graphentheorie)“ in Wikipedia und Gottwald u. a. (1995, 735 ff.)

Vaters heißen *Brüder*. Ist die Reihenfolge der Unterbäume festgelegt, so heißt der Baum *geordnet*. Die *Ordnung* eines Baumes ist die maximal auftretende Anzahl von Söhnen eines Knoten im Baum. Ein Baum der Ordnung 2 heißt *binär*.

Das *Niveau*  $N(K)$  eines Knotens ist die Weglänge (Anzahl der Knoten) von der Wurzel zu  $K$ , wobei der Weg doppelpunktfrei (kein Knoten darf zwei Mal passiert werden) sein muss. Die *Höhe* des Baumes ist durch das größte auftretende Niveau definiert.

Ein binärer geordneter Baum heißt *ausgeglichen*, wenn der Höhenunterschied zwischen zwei Brüderbäumen maximal 1 beträgt. In der Informatik werden solche Bäume auch *AVL-Bäume* genannt und spielen eine große Rolle bei effektiven Suchalgorithmen.

### 6.1.1 Der Fibonacci-Baum

**Satz 6.2.** *Sei  $B$  ein binärer, geordneter Baum der Höhe  $h$ , bei dem alle ersten Söhne zwei Söhne und alle zweiten Söhne einen Sohn haben. Der Wurzelknoten habe nur einen Sohn. Es sei*

$$N_l := \left| \{K : K \text{ ist Knoten und } N(K) = l\} \right|$$

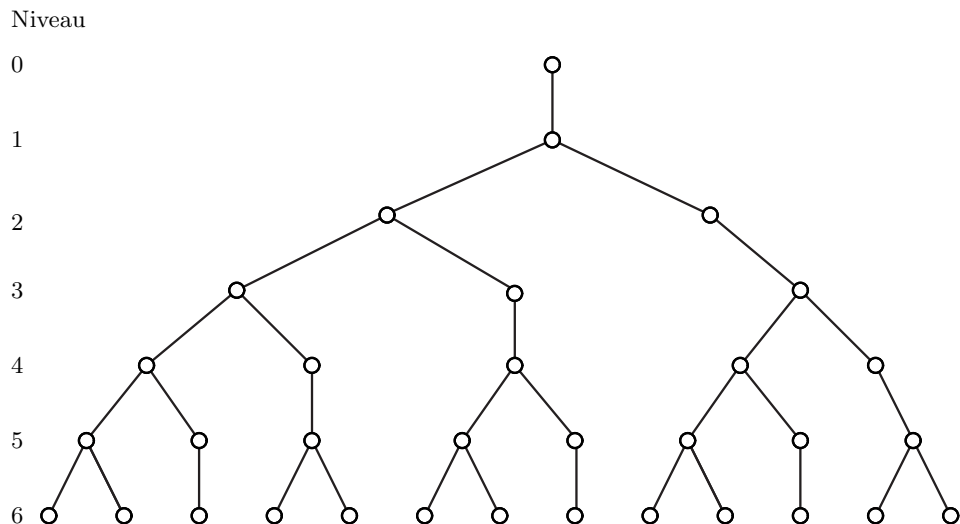
*die Anzahl der Knoten mit Niveau  $k$ . Dann gilt:*

$$N_l = F_{l+1}.$$

*Insbesondere hat  $B$   $F_{h+1}$  Blätter. Wir nennen ihn daher Fibonacci-Baum (Siehe Abb. 6.2).*

*Beweis.* Die Wurzel ist der einzige Knoten mit Niveau 0 und sie hat nur einen Sohn. Für ein allgemeines  $l$  gilt dann:  $N_l = N_{l-1} + N_{l-2}$ , da jeder Knoten im Niveau davor mindestens einen Sohn hat und genau  $N_{l-1}$  davon sind erste Söhne und haben somit noch einen Sohn im aktuellen Niveau. Damit ist die Behauptung durch Induktion bewiesen.  $\square$

**Beispiel 6.3** (Kaninchenproblem). Ein Beispiel für diesen Baum ist natürlich das klassische Kaninchenproblem, das zur Definition der Fibonacci-Zahlen geführt hat. Es ist leicht zu sehen, dass die ersten Söhne im Baum den fruchtbaren und die zweiten Söhne den noch unfruchtbaren Kaninchenpaaren entsprechen.




---

**Abbildung 6.2:** Fibonacci-Baum der Höhe 6 mit  $F_7$  Blättern. Er ist ein binärer, geordneter Baum, bei dem alle ersten Söhne zwei Söhne und alle zweiten Söhne einen Sohn haben. Er hat auf jedem Niveau  $n$   $F_{n+1}$  Knoten.

---

**Beispiel 6.4** (Stammbaum der Drohne). Ein realistischeres Modell für die Fibonacci-Zahlen als die Kaninchenpopulation führt Beutelspacher (1988, S. 86) an: Es ist der Stammbaum einer Drohne, welche aus einem *unbefruchteten* Ei einer Bienenkönigin schlüpft. Die Königin und die Arbeiterinnen wiederum schlüpfen aus von Drohnen befruchteten Eiern.

In unserem Baum steht die Drohne also zuoberst. Jeder erste Kindknoten ist also eine Königin (Mutter) und jeder zweite Kindknoten ist wieder eine Drohne (Vater) mit nur einer Königin als „Elter“.

Wir sehen also, dass eine Drohne in der  $n$ -ten Vorfahrengeneration  $F_{n+1}$  Vorfahren hat.

### KK-freie Serien beim $n$ -fachen Münzwurf

Die folgende Anwendung<sup>2</sup> des Fibonacci-Baumes kommt aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es wird eine Münze geworfen mit dem Ergebnis, dass entweder Kopf (K) oder Adler (A) oben liegt. Wir betrachten nun KK-freie Serien der Länge  $n$ . Das heißt, die Münze wird  $n$ -Mal geworfen und nach jedem K muss wieder A kommen.

In unserem Baum (Abb. 6.2) lassen wir die Wurzel außer Acht und der einzige

---

<sup>2</sup> Als Quelle dienen Humenberger (2000) und Vajda (1989, S. 54f).

Knoten von Niveau 1 sei die neue Wurzel. Jede linke Kante bedeute einen Wurf mit dem Ergebnis A und jede rechte einen Wurf mit Ergebnis K.

**Satz 6.5.** *Beim  $n$ -fachen Münzwurf gibt es  $F_{n+2}$  Möglichkeiten eine KK-freie Serie zu werfen.*

*Beweis.* Bei einer Serie der Länge 1 gibt es genau zwei Möglichkeiten, nämlich (K) und (A). Für die Länge 2 ergeben sich drei Möglichkeiten: (AA), (AK), (KA).

Wir betrachten nun eine Serie der Länge  $n$ . Endet die Serie mit A, so gibt es für die Restserie der Länge  $n - 1$  nach Induktionsvoraussetzung  $F_{n+1}$  Möglichkeiten. Endet die Serie jedoch mit K, so muss diesem ein A vorangehen und es gibt  $F_n$  Möglichkeiten für den Anfang der Serie mit der Länge  $n - 2$ . Insgesamt erhält man  $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$  Varianten einer KK-freien Serie der Länge  $n$ . □

**Definition 6.6** (Erwartungswert). Für eine diskrete Zufallsvariable  $X$  mit den möglichen Werten  $x_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  ist der Erwartungswert folgendermaßen definiert, falls die Reihe absolut konvergiert:

$$E(X) := \sum_{k=0}^{\infty} x_k P(X = x_k). \quad (6.1)$$

$P(X = x_k)$  ist hierbei die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $X = x_k$  eintritt.

Wir wollen nun den Erwartungswert für das Ereignis KK betrachten. Sei also  $X$  die Zufallsvariable für das erste Auftreten von KK und es gilt:

$$E(X) = E(KK) = \sum_{n=2}^{\infty} n P(X = n).$$

Für eine Serie von Münzwürfen der Länge  $n$  gibt es  $2^n$  verschiedene Möglichkeiten. Sei  $x_n$  die Anzahl der Möglichkeiten eine Serie der Länge  $n$  mit KK am Ende zu werfen. Dann ist  $P(X = n) = \frac{x_n}{2^n}$ . Für  $n = 2$  gibt es die einzige Möglichkeit KK und es ist  $x_2 = 1$ . Bei  $n = 3$  ist AKK die einzig günstige Folge und wir haben  $x_3 = 1$ . Für alle höheren  $n$  nehmen wir eine KK-freie Folge der

Länge  $n - 3$  und hängen AKK an. Also folgt, dass  $x_n = F_{n-1}$  und es gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{F_{n-1}}{2^n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n \sqrt{5}} (\Phi^{n-1} - \Phi'^{n-1}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left( \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{\Phi}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{\Phi'}{2}\right)^{n-1} \right). \end{aligned}$$

Für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$  gilt die Summenformel der geometrischen Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}. \quad (6.2)$$

Durch gliedweises Differenzieren erhalten wir folgende Form:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}. \quad (6.3)$$

Da sowohl  $|\frac{\Phi}{2}| < 1$  als auch  $|\frac{\Phi'}{2}| < 1$  gilt, können wir die Formel (6.3) anwenden und erhalten unter Berücksichtigung der Indexverschiebung:

$$E(X) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1}{(1-\frac{\Phi}{2})^2} - 1 \right) - \left( \frac{1}{(1-\frac{\Phi'}{2})^2} - 1 \right) \right).$$

Wegen Satz 3.2 folgt  $(1 - \frac{\Phi}{2})^2 = \frac{1}{4\Phi^4}$ . Das Gleiche gilt für den Nenner der zweiten Klammer. Wir erhalten also

$$E(X) = \frac{2}{\sqrt{5}} (\Phi^4 - \Phi'^4)$$

und mit Satz 3.2 und Satz 3.6 berechnen wir weiter

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\sqrt{5}} (2 + 3\Phi - 5 + 3\Phi) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} (6\Phi - 3) \\ &= \frac{6 + 6\sqrt{5} - 6}{\sqrt{5}} = 6. \end{aligned}$$

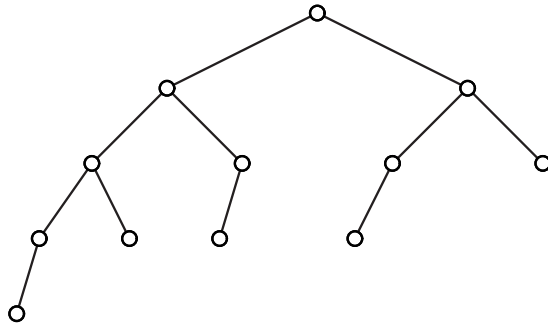
Wir können also folgenden Satz formulieren:

**Satz 6.7.** *Für den Erwartungswert des Ereignisses KK beim Werfen einer fairen Münze gilt:*

$$E(KK) = 6. \quad (6.4)$$

### 6.1.2 AVL-Bäume

Beim Fibonacci-Baum hatten alle Blätter das gleiche Niveau. Wir betrachten nun etwas allgemeinere Bäume, bei denen zwei benachbarte Unterbäume einen Höhenunterschied von höchstens 1 haben, so genannte *AVL-Bäume*. Die Bezeichnung kommt von den Erfindern Adelson-Velskii und Landis (Gütig und Dieker, 2003, S. 141).



---

**Abbildung 6.3:** Ein minimal besetzter AVL-Baum der Höhe 4. Zwei benachbarte Unterbäume haben einen Höhenunterschied von genau 1. Die Anzahl der Blätter ist  $F_5$ .

---

Wir betrachten nun einen minimal besetzten AVL-Baum (Abb. 6.3). Die minimale Anzahl der Knoten erhalten wir dadurch, dass wir den maximal erlaubten Höhenunterschied von 1 zwischen zwei benachbarten Unterbäumen voll ausnutzen. Wir erhalten einen solchen Baum der Höhe  $h$  rekursiv, indem wir an einen Wurzelknoten zwei Unterbäume der Höhen  $h - 1$  und  $h - 2$  anhängen. Dabei habe der leere Baum formal die Höhe  $-1$ , da ein Baum, der nur aus der Wurzel besteht, laut Definition die Höhe 0 hat.

**Satz 6.8.** *Ein minimal besetzter AVL-Baum der Höhe  $h$  hat  $F_{h+3} - 1$  Knoten und  $F_{h+1}$  Blätter.*

*Beweis.* Der leere Baum hat die Höhe  $-1$  und 0 Knoten, somit auch keine Blätter. Da  $F_2 - 1 = 0$  und  $F_0 = 0$ , ist die Aussage für diesen Fall richtig. Ein Baum mit nur einem Knoten hat die Höhe 0 und mit  $F_3 - 1 = 1$  und  $F_1 = 1$  stimmt der Satz auch für diesen Fall.

Wegen der rekursiven Aufbauvorschrift des Baumes gilt für die Anzahl der Knoten  $A(h)$  in einem minimal besetzten AVL-Baum der Höhe  $h$ , dass

$$A(h) = 1 + A(h - 1) + A(h - 2). \quad (6.5)$$

Nun ist nach Voraussetzung  $A(h-1) = F_{h+2} - 1$  und  $A(h-2) = F_{h+1} - 1$  und es folgt

$$A(h) = 1 + F_{h+2} - 1 + F_{h+1} - 1 = F_{h+3} - 1, \quad (6.6)$$

womit die Aussage für die Anzahl der Knoten bewiesen wäre.

Da sich die Anzahl der Blätter zweier Unterbäume der Höhen  $h-1$  und  $h-2$  addieren, hat ein Baum der Höhe  $h$  nach Induktionsvoraussetzung  $F_h + F_{h-1} = F_{h+1}$  Blätter.  $\square$

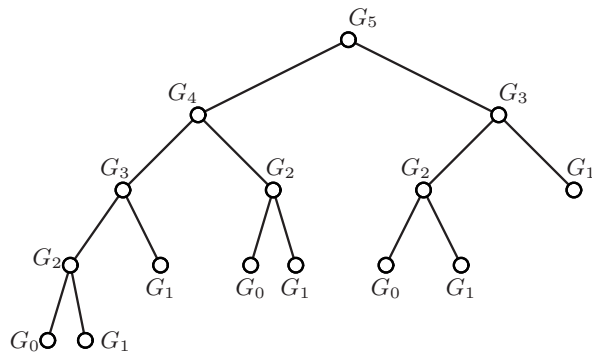
**Beispiel 6.9** (Treppensteigen). Ein minimal besetzter AVL-Baum der Höhe  $h$  kann als Entscheidungsbaum beim Ersteigen einer Treppe mit  $h$  Stufen verstanden werden. Eine linke Kante ist die Entscheidung, nur eine Stufe zu nehmen, eine rechte Kante bedeutet, man nimmt zwei Stufen auf einmal. Es ergeben sich  $F_{h+1}$  Möglichkeiten die Treppe zu bezwingen. Wobei das Niveau des jeweiligen Endpunktes die Anzahl der nötigen Schritte ist (Beutelspacher, 1988, S. 85f).

Gleichartig zur Frage des Treppensteigens ist die Frage nach der Anzahl der möglichen Darstellungen einer Zahl  $n$  durch eine Summe aus Einsen und Zweien, wobei die Reihenfolge berücksichtigt werden soll.

**Satz 6.10.** *Es gibt genau  $F_{n+1}$  verschiedene Möglichkeiten die Zahl  $n \geq 1$  als Summe von Einsen und Zweien darzustellen, wobei die Reihenfolge der Summanden eine Rolle spielt.*

*Beweis.* Wir beweisen durch Induktion. Für  $n = 1$  gibt es nur eine Möglichkeit. Bei  $n = 2$  sind  $2 = 2$  und  $2 = 1 + 1$  die beiden Varianten. Für ein beliebiges  $n$  gilt  $n = 2 + (n-2) = 1 + (n-1)$ , wobei es nach Induktionsvoraussetzung für  $n-2$  genau  $F_{n-1}$  und für  $n-1$  genau  $F_n$  Varianten gibt. Insgesamt gibt es also  $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$  Möglichkeiten,  $n$  als eine solche Summe zu schreiben.  $\square$

Einen weiteren AVL-Baum erhält man, wenn man im minimal besetzten AVL-Baum dafür sorgt, dass jedes Blatt einen Bruder hat. Wir können nun den Knoten Werte zuordnen: Es erhalte jeder Knoten die Summe der Werte seiner Kindknoten, und die linken und rechten Blätter erhalten die Werte  $G_0$  bzw.  $G_1$ . Ein Blatt, dessen Bruder kein Blatt ist, sei immer ein rechtes Blatt.




---

**Abbildung 6.4:** Additionsbaum der allgemeinen Fibonacci-Zahlen der Höhe 4. Der Baum hat  $F_6$  Blätter.

---

**Satz 6.11.** *Sei  $h$  die Höhe eines solchen Baumes. Dann hat der Wurzelknoten den Wert  $G_{h+1}$ , wobei  $G_n$  eine allgemeine Fibonacci-Folge mit den Startwerten  $G_0$  und  $G_1$  ist.*

*Es gilt weiter, dass der Baum  $F_{h+2}$  Blätter hat.*

*Beweis.* Wir erhalten den Baum rekursiv, indem wir für den Baum der Höhe 0 einen Knoten mit dem Wert  $G_1$  annehmen. Der Baum der Höhe 1 hat, da alle Blätter besetzt sind, die Form



Für einen Baum der Höhe  $h$  kombinieren wir wieder eine Wurzel mit einem Baum der Höhe  $h - 1$  und einem Baum der Höhe  $h - 2$ . Somit ergibt sich die Aussage des Satzes durch Induktion.  $\square$

## 6.2 Allgemeine Fibonacci-Folgen und die Pell'sche Gleichung

Diesem Abschnitt liegt der im Internet veröffentlichte Artikel von Brown „Recurrences and Pell Equations“ zu Grunde.

Wir rufen uns Satz 5.7 (S. 27) in Erinnerung und formulieren die Gleichung (5.25) so, dass auf jeder Seite nur jeweils zwei verschiedene Folgenglieder der allgemeinen Fibonacci-Folge auftreten:

$$G_n^2 - G_n G_{n-1} - G_{n-1}^2 = (G_1^2 - G_0 G_1 - G_0^2) (-1)^{n-1}. \quad (6.7)$$

Der Einfachheit halber definieren wir  $a := G_0$  und  $b := G_1$  und es sei  $D := |b^2 - ab - a^2|$ , woraus sich die Gleichung

$$b^2 - ab - a^2 = \pm D \quad (6.8)$$

ergibt, die wir mit  $u = 2b - a$  und  $v = a$  in die als *Pell'sche Gleichung* bekannte Form

$$u^2 - 5v^2 = \pm 4D \quad (6.9)$$

bringen. Lassen wir nur eines der Vorzeichen von  $D$  gelten, so sprechen wir von der Plus- bzw, Minus-Gleichung.

Aus Gleichung (6.7) können wir die Aussage des nächsten Satzes folgern:

**Satz 6.12.** *Ist  $(a_0, b_0)$  eine Lösung der Gleichung (6.8), so sind jeweils zwei benachbarte Folgenglieder der allgemeinen Fibonacci-Folge, die durch Startwerte  $G_0 = a$  und  $G_1 = b$  definiert ist, ebenfalls Lösungen dieser Gleichung.*

Wir stellen nun umgekehrt die Frage, für welche  $D$  überhaupt Lösungen existieren. Dazu betrachten wir den Fall, in dem  $D$  eine Primzahl ist und es gilt  $u^2 \equiv 5v^2 \pmod{D}$ . Wir sehen, dass nur dann Lösungen existieren, wenn 5 ein Quadrat modulo  $D$  ist, oder  $5 \equiv 0 \pmod{p}$  gilt. Um dieser Frage nachzugehen, mache ich einen kleinen Exkurs über quadratische Reste in Hinblick auf unsere besondere Situation:

Für zwei Zahlen  $a, p$  mit  $p > 2$  prim und  $\text{ggT}(a, p) = 1$  ist das *Legendre-Symbol* folgendermaßen definiert:

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a \text{ quadratischer Rest modulo } p \\ -1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.10)$$

Das *Quadratische Reziprozitätsgesetz* beschreibt für zwei ungerade Primzahlen  $p$  und  $q$  folgende Beziehung:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}. \quad (6.11)$$

Sei also  $q = 5$ , dann gilt:

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right), \quad (6.12)$$

da  $\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2} = p-1$  immer gerade ist. Also ist 5 ein quadratischer Rest modulo  $p$  genau dann, wenn  $p$  ein quadratischer Rest modulo 5 ist. In  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}5$  sind  $1 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 4 \cdot 4 \pmod{5}$  und  $-1 \equiv 4 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 2 \pmod{5}$  die Quadrate. Daraus folgt, dass 5 ein Quadrat modulo  $p$  ist, falls  $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$  ist.

Bei der Pell'schen Gleichung sehen wir, dass es für  $D$  prim nur dann Lösungen gibt, wenn  $D \equiv \pm 1 \pmod{5}$  ist.

Wir lösen nun die Gleichung (6.8) nach  $b$  auf:

$$b_{1,2} = \frac{1}{2} \left( a \pm \sqrt{5a^2 \pm 4D} \right). \quad (6.13)$$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	Plus-Gleichung							
$a = v$	-8	-3	-1	0	1	3	8	21
$b_1$	5	2	1	1	2	5	13	34
$b_2$	-13	-5	-2	-1	-1	-2	-5	-13
$u$	$\pm 18$	$\pm 7$	$\pm 3$	$\pm 2$	$\pm 3$	$\pm 7$	$\pm 18$	$\pm 47$
	Minus-Gleichung							
$a = v$	-5	-2	-1		1	2	5	13
$b_1$	3	1	0		1	3	8	21
$b_2$	-8	-3	-1		0	-1	-3	-8
$u$	$\pm 11$	$\pm 4$	$\pm 1$		$\pm 1$	$\pm 4$	$\pm 11$	$\pm 29$

---

**Tabelle 6.1:** Lösungen der Pell'schen Gleichung  $u^2 - 5v^2 = \pm 4D$  für  $D = 1$ , wobei  $u = 2b - a$  und  $v = a$  ist.  $b_1$  bezieht sich dabei immer auf das positive und  $b_2$  entsprechend auf das negative Vorzeichen von  $u$ .

---

**Beispiel 6.13.** Die ersten Lösungen für den Fall  $D = 1$  sind in Tabelle 6.1 dargestellt. Wir sehen, dass als Lösungen immer Paare von benachbarten Fibonacci-Zahlen auftreten, wobei alle Kombinationen von Vorzeichen möglich sind. Die Lösungsmenge ist demnach  $L = \{(a, b) = \pm(F_n, F_{n+1}) : n \in \mathbb{Z}\}$ . Da  $u = 2b - a$  ist, folgt aus Gleichung (5.23), dass  $u$  eine Lucas-Zahl ist. Also sind die Lösungen in  $u$  und  $v$  von der Form  $(\pm L_n, \pm F_n)$ .

**Beispiel 6.14.** Für den Fall  $D = 5$  bestehen die Lösungen aus Paaren benachbarter Lucas-Zahlen, wie man leicht nachrechnet.

Nach Brown liegen die Lösungen für  $D$  prim,  $D \equiv \pm 1 \pmod{5}$  in zwei verschiedenen, allgemeinen Fibonacci-Folgen. So liegen z. B. die Lösungen für  $D = 11$  in den Folgen mit den Startwerten 3, 1 und 3, 2. Einen Beweis dafür bleibe ich an dieser Stelle schuldig.

Das Thema Pell'sche Gleichung und allgemeine Fibonacci-Folgen ist mit diesem kurzen Überblick natürlich nicht erschöpfend behandelt. Die Literatur

dazu ist sehr umfangreich. Siehe zum Beispiel Lind (1968), Emerson (1969), Antoniadis (1985) und DeLeon (1981).

### 6.3 Die Fibonacci-Algebra $\mathbb{Z}[\Phi]$

In diesem Abschnitt betrachten wir die quadratische  $\mathbb{Z}$ -Algebra  $\mathbb{Z}[\Phi]$ . Wir verwenden dazu Scheja und Storch (1994, Anhang V.A) als Grundlage.

Da  $\mathbb{Z}[\Phi] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\Phi$  gilt, und 1 und  $\Phi$  über  $\mathbb{Z}$  linear unabhängig sind, bilden 1,  $\Phi$  eine Basis für  $\mathbb{Z}[\Phi]$ .

Für das Basiselement  $w$  einer  $A$ -Algebra  $B$ , das nicht aus  $A$  ist, gibt es  $\alpha, \beta \in A$  sodass  $w^2 = \alpha + \beta w$ .  $B$  wird dann eine Quadratische  $A$ -Algebra vom Typ  $(\alpha, \beta)$  genannt.

In unserem Falle ist  $\Phi^2 = 1 + 1\Phi$  und  $\mathbb{Z}[\Phi]$  ist von Typ  $(1, 1)$ .

Damit ist  $\mathbb{Z}[\Phi]$  isomorph zur Restklassenalgebra  $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X - 1)$ , da für die Restklasse  $x$  von  $X$   $x^2 - x - 1 = 0$  gilt. Daraus folgt zum Einen, dass wegen  $x^2 = 1 + x$  die Algebra ebenfalls vom Typ  $(1, 1)$  ist und zum Anderen, dass  $\Phi \leftrightarrow x$  ein Isomorphismus ist. Also können wir folgende Definition aufstellen:

**Definition 6.15** (Fibonacci-Algebra).

$$\mathcal{F} := \mathbb{Z}[\Phi] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 - X - 1)$$

Wir nennen die quadratische  $\mathbb{Z}$ -Algebra  $\mathcal{F}$  die *Fibonacci-Algebra*.

Die *Konjugation* ist durch  $\Phi \mapsto \bar{\Phi} = \Phi' = 1 - \Phi$  gegeben. Die *Norm* von  $x = (a + b\Phi)$  auf  $\mathcal{F}$  ist durch  $N(x) := x\bar{x}$  definiert, wobei gilt:

$$N(x) = a^2 + ab - b^2. \tag{6.14}$$

Wegen Satz 3.5 wissen wir, dass  $N(\Phi) = \Phi\Phi' = -1$ . Durch einfaches Nachrechnen lässt sich leicht bestätigen, dass die Norm multiplikativ ist, d. h. es gilt:  $N(xy) = N(x)N(y)$ .

Die *Differente* einer quadratischen Algebra mit Basis 1,  $w$  ist durch

$$\text{Diff}(1, w) := w - \bar{w} \tag{6.15}$$

definiert. Im Falle der Algebra  $\mathcal{F}$  gilt:

$$\text{Diff}(1, \Phi) = \Phi - \Phi' = \sqrt{5}.$$

Die *Diskriminante* einer Algebra bezüglich einer Basis  $(1, w)$  wird mit  $\Delta$  bezeichnet und ist für  $w^2 = \alpha + \beta w$  durch

$$\Delta := \beta^2 + 4\alpha \quad (6.16)$$

gegeben. Im Falle von  $\mathcal{F}$  ist  $\Delta = 5$ .

**Satz 6.16.**  $\mathcal{F}$  ist nullteilerfrei.

*Beweis.* Ein  $x \in \mathcal{F}$  ist genau dann Nichtnullteiler, wenn  $N(x)$  Nichtnullteiler in  $\mathbb{Z}$  ist. Sei also  $0 \neq x = (a + b\Phi) \in \mathcal{F}$ . Falls  $b = 0$ , so ist  $N(x) = a^2 \neq 0$ . Falls  $a = 0$ , ist  $N(x) = -b^2 \neq 0$ . Für  $a, b \neq 0$  müssen wir  $N(x) = 0$  lösen. Wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned} N(x) &= a^2 + ab - b^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} + 1 - \frac{b}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad u^2 + u - 1 &= 0 \quad \text{für } u = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

mit der Lösungsmenge  $L = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$ , deren Elemente nicht in  $\mathbb{Q}$  liegen. Damit ist  $\mathcal{F}$  nullteilerfrei, denn es gibt keine  $a, b \in \mathbb{Z}$  sodass  $N(a + b\Phi) = 0$  ist.  $\square$

**Satz 6.17.** Die Einheiten von  $\mathcal{F}$  haben die Form  $\pm(F_{n-1} + F_n\Phi) = \pm\Phi^n$  für  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Die Einheiten von  $\mathcal{F}$  sind genau die Elemente, deren Norm eine Einheit in  $\mathbb{Z}$  ist, also genau die  $e = (a + b\Phi) \in \mathcal{F}$ , für die gilt:

$$N(e) = a^2 + ab - b^2 = \pm 1. \quad (6.17)$$

Wenn wir diese Gleichung nach  $b$  auflösen, erhalten wir die Pell'sche Gleichung (6.13) mit  $D = 1$ . Die Vertauschung von  $a$  und  $b$  ist auf die umgekehrten Vorzeichen zurück zu führen. Nach den Ergebnissen von Abschnitt 6.2 sind also genau die Elemente der Form  $\pm(F_{n-1} + F_n\Phi)$  die Einheiten von  $\mathcal{F}$ .

Da  $\mathcal{F}$  nullteilerfrei ist und eine positive Diskriminante besitzt, ist die Einheitengruppe  $\mathcal{F}^\times$  das direkte Produkt aus  $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$  und einer unendlichen zyklischen Gruppe (Scheja und Storch, 1994, vergl. Satz V.A.11). Das erzeugende Element dieser zyklischen Gruppe (die so genannte Grundeinheit) ist somit  $\Phi$ , da wegen Satz 3.2 alle Elemente der Form  $F_{n-1} + F_n\Phi$  durch die Potenzen von  $\Phi$  gegeben sind.  $\square$

Wir definieren auf  $\mathcal{F}$  eine *euklidische Funktion*  $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$  durch den Betrag der Norm:  $\nu(x) := |N(x)|$ . Mithilfe der euklidischen Funktion können wir eine *Division mit Rest* auf  $\mathcal{F}$  einführen (Scheja und Storch, 1988, vergl. S. 151f): Zu  $x = (a+b\Phi), y = (c+d\Phi) \in \mathcal{F}$ , mit  $y \neq 0$  gibt es  $q, r \in \mathcal{F}$ , sodass  $x = qy + r$ , wobei  $r = 0$  oder  $\nu(r) < \nu(y)$  ist.

Indem wir unseren Rechenraum auf  $\mathbb{Q}[\Phi]$  erweitern, können wir folgendes schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{a + b\Phi}{c + d\Phi} \\ &= \frac{(a + b\Phi)(c + d\Phi')}{N(y)} \\ &= \frac{(ac - bd + ad)}{N(y)} + \frac{(bc - ad)\Phi}{N(y)} \\ &= (s + v) + (t + w)\Phi. \end{aligned}$$

Wir wählen dabei  $s$  und  $t$  ganzzahlig und  $v$  und  $w$  rational mit  $|v|, |w| \leq \frac{1}{2}$ . Mit  $q := (s + t\Phi) \in \mathcal{F}$  und  $r := y(v + w\Phi)$  gilt dann  $x = qy + r$ , womit auch  $r \in \mathcal{F}$ .

Aus der Multiplikativität der Norm folgt, dass auch die euklidische Funktion multiplikativ ist und es gilt:  $\nu(r) = \nu(y)\nu(v + w\Phi)$ . Es ist aber  $\nu(v + w\Phi) = |v^2 + vw - w^2| \leq \frac{1}{2}$ , woraus folgt, dass  $\nu(r) < \nu(y)$  ist.

Damit ist die Division mit Rest gegeben und da  $\mathcal{F}$  nullteilerfrei und kommutativ ist, ist der folgende Satz bereits bewiesen:

**Satz 6.18.** *Die quadratische Algebra  $\mathcal{F} = \mathbb{Z}[\Phi]$  ist ein euklidischer Bereich und somit ein Hauptidealbereich.*

## 6.4 Periodenlängen von Fibonacci-Folgen modulo $m$

Wir wollen in diesem Abschnitt die Folge der Fibonacci-Zahlen modulo einer natürlichen Zahl  $m$  betrachten. Die erste genauere Untersuchung zu diesem Thema stellte Wall (1960) an, um die Brauchbarkeit der Fibonacci-Zahlen für die Kryptographie zu untersuchen. Als Grundlage für diesen Abschnitt dient vor allem Wall (1960) und der vorige Abschnitt dieser Arbeit.

Satz 4.5 lässt sich auch so formulieren:

**Satz 6.19.** *Die Folge  $F_n \pmod{m} = [F_n]_m$  ist reinperiodisch mit einer Periodenlänge  $\lambda(m) \leq m^2$ . Die Periodenlänge  $\lambda(m)$  wird die „Wall-Zahl“ genannt (Becker, 1997, S. 10).*

Folgende allgemeine Aussagen lassen sich über die Periodenlängen der Fibonacci-Zahlen machen:

**Satz 6.20.** *Seien  $m, n \geq 2$ , dann gilt:*

$$m \mid n \Rightarrow \lambda(m) \mid \lambda(n). \quad (6.18)$$

*Beweis.* Sei  $\lambda(n) = k$ , also gilt  $F_k \equiv 0 \pmod{n}$ , d. h.  $n \mid F_k$  und nach Voraussetzung ist dann auch  $m \mid F_k$ . Genauso folgt aus  $F_l \equiv 1 \pmod{n}$  dass  $F_l \equiv 1 \pmod{m}$ . Damit ist die Periodenlänge modulo  $m$  ein Teiler der Periodenlänge modulo  $n$ .  $\square$

Den zweiten Satz von Wall (1960, S. 526) führen wir in der etwas allgemeineren Form, wie bei Becker (1997, S. 10f) an:

**Lemma 6.21.** *Seien  $m$  und  $n$  teilerfremd, dann gilt:*

$$\lambda(mn) = \text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n)). \quad (6.19)$$

*Beweis.* Wir wollen für den Beweis  $\text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n)) =: q$  setzten. Nach Satz 6.20 sind  $\lambda(m)$  und  $\lambda(n)$  Teiler von  $\lambda(mn)$ , es gilt also:  $q \mid \lambda(mn)$ .

Außerdem ist  $F_q \equiv 0 \pmod{m}$  und  $F_q \equiv 0 \pmod{n}$  da  $q$  ein Vielfaches von  $m$  und  $n$  ist und für die Fibonacci-Zahlen nach Lemma 4.4 entsprechendes gilt. Genauso ist  $F_{q+1} \equiv 1 \pmod{m}$  und  $F_{q+1} \equiv 1 \pmod{n}$ . Für teilerfremde  $m$  und  $n$  gibt es zu einem  $a \in \mathbb{Z}$  nach dem chinesischen Restsatz genau eine Restklasse  $[b]$  für die gilt:  $b \equiv a \pmod{m}$  und zugleich  $b \equiv a \pmod{n}$ . Also sind  $F_q$  und  $F_{q+1}$  die beiden Restklassen zu 0 und 1. Da natürlich  $m$  und  $n$  Teiler von  $mn$  sind gilt weiter:  $F_q \equiv 0 \pmod{mn}$  und  $F_{q+1} \equiv 1 \pmod{mn}$ . Daraus folgt:  $\lambda(mn) \mid q$ .

Insgesamt erhalten wir:  $\lambda(mn) = \text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n))$ .  $\square$

Um die Periodenlänge der Fibonacci-Folge modulo  $m$  bestimmen zu können, bestimme man die Ordnung von  $\Phi$  in  $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}m)[\Phi]$ . Da  $\Phi$  eine Einheit ist, ist die Ordnung von  $\Phi$  ein Teiler der Einheitengruppe  $((\mathbb{Z}/\mathbb{Z}m)[\Phi])^\times$ .

Es gelte folgende Bezeichnung:

$$\mathcal{F}_m := (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}m)[\Phi].$$

Da  $\mathcal{F}$  vom Rang 2 über  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}m$  ist, gilt  $|\mathcal{F}_m| = m^2$ .

Die Untersuchung der Periodenlängen modulo eines allgemeinen  $m$  erweist sich als äußerst umständlich. Es ist daher sinnvoll, Betrachtungen modulo  $p^\alpha$ ,  $p$  prim,  $\alpha \in \mathbb{N}$  anzustellen.

Für die Primfaktorzerlegung von  $m$

$$m = \prod_{p|m} p^{\alpha_p} \quad p \text{ prim}$$

können wir – unter Verwendung des Chinesischen Restsatzes – folgende Isomorphie aufstellen:

$$(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}m)[\Phi] \cong \prod_{p|m} (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{\alpha_p})[\Phi]. \quad (6.20)$$

Die Ordnung eines Elementes  $x \in ((\mathbb{Z}/\mathbb{Z}m)[\Phi])^\times$  ist dann das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen in den jeweiligen  $((\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^{\alpha_p})[\Phi])^\times$ .

Im Folgenden bezeichne  $\text{Ord}_m x$  die Ordnung von  $x$  in  $((\mathbb{Z}/\mathbb{Z}m)[\Phi])^\times$ . Man sieht sofort, dass  $\lambda(m) = \text{Ord}_m \Phi$ .

### 6.4.1 Die Fibonacci-Folge modulo $p$

Bei der Betrachtung der vereinfachten Fälle modulo  $p$  müssen wir einige Fälle unterscheiden:

**$p = 2$**  Dieser Fall ist deshalb von Interesse, da die binomische Formel wegen  $2 \equiv 0 \pmod{2}$  die Form  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$  hat.

Da  $(0 + 1\Phi)(1 + 1\Phi) = (1 + 0\Phi)$  gilt, ist  $\mathcal{F}_2$  isomorph zum Körper mit 4 Elementen. Die Einheitengruppe  $\mathcal{F}_2^\times$  hat die Ordnung  $p^2 - 1 = 3$ . Da 3 prim ist, ist die Einheitengruppe zyklisch und es folgt, dass  $\lambda(2) = 3$ .

**$p = 5$**  In diesem Fall ist die Diskriminante von  $\mathcal{F}_5$  gleich 0 und  $\mathcal{F}_5$  ist deshalb isomorph zur Algebra der dualen Zahlen  $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}5)[X]/(X^2)$  mit der Basis  $1, \varepsilon$  wobei  $\varepsilon^2 = 0$  gilt. Konkret gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_5 &= (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}5)[X]/(X^2 - X - 1) \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}5[Y]/(Y^2) \\ (a + b\Phi) &\leftrightarrow (a + 3b + b\varepsilon) \\ (1 + 0\Phi) &\leftrightarrow (1 + 0\varepsilon) \\ (0 + \Phi) &\leftrightarrow (3 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Wegen  $\bar{\varepsilon} = -\varepsilon$ , gilt  $N(a + b\varepsilon) = a^2$ . Daraus folgt, dass genau die Elemente  $(0 + b\varepsilon)$  nicht in der Einheitengruppe sind. In  $\mathcal{F}_5$  sind das genau die Elemente  $(a + b\Phi)$  für die gilt  $a = 2b$ . Die Einheitengruppe hat demnach die Ordnung  $(p - 1)p = p^2 - p = 20$  und wird von  $\Phi$  erzeugt, wie man durch Nachrechnen leicht bestätigen kann. Es gilt also:  $\lambda(5) = 20$ .

Da die Diskriminante  $\Delta = 5$  ist, müssen wir für alle übrigen  $p$  unterscheiden, ob 5 ein Quadrat modulo  $p$  ist oder nicht. Diesen Sachverhalt haben wir in Abschnitt 6.2 schon untersucht und wir wissen, dass 5 ein Quadrat modulo  $p$  ist, falls  $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$  ist. Umgekehrt ist 5 kein Quadrat modulo  $p$  falls  $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$  ist.

$p \equiv \pm 1 \pmod{5}$  Wie wir gesehen haben, ist in diesem Fall 5 ein Quadrat modulo  $p$  und das Polynom  $X^2 - X - 1$  hat 2 Nullstellen ( $x_1$  und  $x_2$ ) in  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ . Daher ist  $\mathcal{F}_p \cong (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)[X]/(X^2 - X - 1) \cong (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)[x_1, x_2]$  isomorph zur Produktalgebra  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ . Die Einheitengruppe hat die Ordnung  $(p-1)^2$ .

$p \equiv \pm 2 \pmod{5}$  Da 5 kein Quadrat in  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$  ist, hat das Polynom  $X^2 - X - 1$  keine Nullstelle in  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$  und  $\mathcal{F}_p \cong (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)[\sqrt{5}]$  ist wieder ein Körper dessen Einheitengruppe die Ordnung  $p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$  hat.

Als vorläufiges Ergebnis können wir folgenden Satz formulieren:

**Satz 6.22.** *Sei  $p$  eine ungerade Primzahl, dann gilt:*

$$\lambda(p) \mid (p-1)^2, \quad \text{falls } p \equiv \pm 1 \pmod{5}, \quad (6.21)$$

$$\lambda(p) \mid (p^2 - 1), \quad \text{falls } p \equiv \pm 2 \pmod{5}. \quad (6.22)$$

Außerdem gilt:

$$\lambda(2) = 3, \quad (6.23)$$

$$\lambda(5) = 20. \quad (6.24)$$

Wir können Satz 6.22 noch verschärfen, indem wir die Binetformel (5.17) für  $n = p$  und  $n = p + 1$  modulo  $p$ ,  $p \neq 2, 5$  betrachten. Da  $p$  prim ist, sind fast alle Binomialkoeffizienten modulo  $p$  gleich Null. Sei also  $n = p$ :

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^p - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^p \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{(1 + \sqrt{5})^p - (1 - \sqrt{5})^p}{2^p} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}^p}{2^{p-1}} \\ &= 5^{\frac{p-1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Wobei für  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  der kleine Fermatsche Satz verwendet wurde.

Sei nun  $n = p + 1$ , dann gilt

$$(1 + \sqrt{5})^{p+1} = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{5}^p + \sqrt{5}^{p+1}$$

und

$$(1 - \sqrt{5})^{p+1} = 1 - \sqrt{5} - \sqrt{5}^p + \sqrt{5}^{p+1}.$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$F_{p+1} = \frac{1 + 5^{\frac{p-1}{2}}}{2}. \quad (6.26)$$

Nach dem Euler-Kriterium für Quadratische Reste ist nun

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{5}{p}\right) \pmod{p}. \quad (6.27)$$

Falls 5 ein Quadrat modulo  $p$  ist, d. h.  $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$ , dann gilt:  $F_p \equiv 1 \pmod{p}$  und  $F_{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$ , woraus folgt, dass  $F_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$ .

Ist 5 kein Quadrat modulo  $p$ , so ist  $F_p \equiv -1 \pmod{p}$ ,  $F_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}$  und  $F_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

Wir können also zusammenfassen und erhalten folgenden Satz:

**Satz 6.23.** *Sei  $p$  eine ungerade Primzahl und  $p \neq 5$  dann gilt:*

$$\lambda(p) \mid (p-1), \quad \text{falls } p \equiv \pm 1 \pmod{5}, \quad (6.28)$$

$$\lambda(p) \mid 2(p+1), \quad \text{falls } p \equiv \pm 2 \pmod{5}. \quad (6.29)$$

*Beweis.* Für  $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$  ist nichts mehr zu zeigen, da für  $F_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$  und  $F_p \equiv 1 \pmod{p}$  die Anfangswerte der Folge vorliegen.  $p-1$  ist somit ein Vielfaches der Periodenlänge  $\lambda(p)$ .

Für  $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$  ist  $F_{p+2} \equiv -F_1$ ,  $F_{p+3} \equiv -F_2$  und schließlich  $F_{2p+1} \equiv -F_p \equiv 1$  und  $F_{2p+2} \equiv -F_{p+1} \equiv 0$  (alle modulo  $p$ ). Daher wiederholt sich die Folge erst ab dem Index  $2p+2$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

## 6.4.2 Die Fibonacci-Folge modulo $p^\alpha$

Zum Fall  $p^2$  bemerkt Wall (1960, S.528), dass die Vermutung  $\lambda(p) \neq \lambda(p^2)$  nicht bewiesen, aber für alle  $p \leq 10000$  durch Ausrechnen nachgewiesen werden konnte.

Wir werden uns hier damit zufrieden geben die Ordnung der Einheitengruppen von  $\mathcal{F}_{p^\alpha}$  anzugeben. Und zwar gilt folgender Satz:

**Satz 6.24.** Sei  $\alpha \in \mathbb{N}$  und  $p$  eine Primzahl mit  $p \neq 5$ . Dann gilt:

$$|\mathcal{F}_{p^\alpha}^\times| = |\mathcal{F}_p^\times| \cdot p^{2(\alpha-1)}. \quad (6.30)$$

*Beweis.* Wir betrachten den surjektiven Homomorphismus  $\vartheta : \mathcal{F}_{p^\alpha} \rightarrow \mathcal{F}_p$  mit  $\vartheta(a) = [a]_p$ . Der Kern von  $\vartheta$  ist  $p\mathcal{F}/p^\alpha\mathcal{F}$  und hat die Mächtigkeit  $p^{2(\alpha-1)}$ , wie man leicht nachrechnet. Da das Urbild der Einheitengruppe des Bildes die Einheitengruppe des Urbildes ist, gilt mit dem Isomorphiesatz die Aussage des Satzes.  $\square$

Weitere Sätze zur Fibonacci-Folge modulo  $p^\alpha$  findet man in Seltzer (2000), Vajda (1989) und in vielen andere Publikationen.

**Beispiel 6.25** (Die Fibonacci-Folge modulo  $2^\alpha$ ). In der Gleichung (2.5) setzen wir  $m = n$  und erhalten

$$F_{2n} = (F_{n-1} + F_{n+1})F_n.$$

Daraus folgt mit Gleichung (5.22), dass

$$F_{2n} = L_n F_n. \quad (6.31)$$

Wir bemerken noch, dass  $F_n$  und  $L_n$  von gleicher Parität sind und somit die Lucas-Folge die gleiche Periodenlänge modulo zwei hat wie die Fibonacci-Folge.

**Satz 6.26.** Sei  $\alpha \in \mathbb{N}$  und  $\alpha \geq 2$ . Falls  $2^{\alpha-1}$  ein Teiler von  $F_n$  ist, dann ist  $2^\alpha$  ein Teiler von  $F_{2n}$ .

*Beweis.* Da laut Voraussetzung  $F_n$  gerade ist, hat auch  $L_n$  einen Primfaktor 2. Also hat  $F_n L_n = F_{2n}$  einen Teiler  $2^\alpha$ .  $\square$

Da  $\lambda(2) = 3$  ist, gilt folgendes Korollar:

**Korollar 6.27.** Für  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \geq 1$  gilt:

$$F_{3 \cdot 2^{\alpha-1}} \equiv 0 \pmod{2^\alpha}.$$

Wir wollen zeigen dass  $\lambda(2^\alpha) = 3 \cdot 2^{\alpha-1}$ . Dazu müssen wir noch zeigen, dass  $F_{2n+1} \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$ . In Gleichung (2.5) setzen wir  $m = n + 1$  und erhalten nach Umformen folgende Gleichung:

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2. \quad (6.32)$$

Unter der Voraussetzung, dass  $F_n \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-1}}$ , gilt  $F_n = 2^{\alpha-1} \cdot c$  und  $F_n^2 = 2^{2\alpha-2} \cdot c^2$ . Da  $2\alpha - 2 \geq \alpha$  ist, falls  $\alpha \geq 2$ , ist  $F_n^2 \equiv 0 \pmod{2^\alpha}$  für  $\alpha \geq 2$ . Also ist  $F_{2n+1} \equiv F_{n+1}^2 \pmod{2^\alpha}$ . Da  $F_{n+1} \equiv 1 \pmod{2^{\alpha-1}}$ , ist  $F_{n+1}$  modulo  $2^\alpha$  kongruent zu 1 oder zu  $2^\alpha + 1$ . Daraus folgt:  $F_{n+1} \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$ , falls  $\alpha \geq 2$  und wir haben somit den nächsten Satz bewiesen:

**Satz 6.28.** *Sei  $\alpha \in \mathbb{N}$  und  $\alpha \geq 1$ . Dann gilt für die Wall-Zahl:*

$$\lambda(2^\alpha) = 3 \cdot 2^{\alpha-1}. \quad (6.33)$$

**Beispiel 6.29** (Die Fibonacci-Folge modulo  $5^\alpha$ ). In Vajda (1989, S. 81) wird gezeigt, dass der Teiler 5 in  $F_n$  genauso oft enthalten ist wie in  $n$ . Für ein  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \geq 1$  und ein  $c \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(c, 5) = 1$  gilt demnach:

$$F_{c \cdot 5^\alpha} \equiv 0 \pmod{5^\alpha}.$$

Wir wissen bereits, dass  $\lambda(5) = 20 = 5^1 \cdot 4$  und betrachten deswegen den Fall  $c = 4$ .

**Satz 6.30.** *Sei  $\alpha$  eine positive natürliche Zahl. Dann ist*

$$\lambda(5^\alpha) = 4 \cdot 5^\alpha. \quad (6.34)$$

*Beweis.* Wir wissen bereits, dass  $F_{4 \cdot 5^\alpha} \equiv 0 \pmod{5^\alpha}$ . Bleibt zu zeigen, dass  $F_{4 \cdot 5^\alpha + 1} \equiv 1 \pmod{5^\alpha}$  ist. In Gleichung (2.5) setzen wir  $m = n + 1$  und erhalten:

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2. \quad (6.35)$$

Daraus folgt:

$$F_{4 \cdot 5^\alpha + 1} = F_{2 \cdot 5^\alpha + 1}^2 + F_{2 \cdot 5^\alpha}^2.$$

Es gilt aber  $F_{2 \cdot 5^\alpha}^2 \equiv 0 \pmod{5^\alpha}$  und mit der Simpson-Identität (5.26) gilt weiter:

$$F_{2 \cdot 5^\alpha + 1}^2 = (-1)^{2 \cdot 5^\alpha} + F_{2 \cdot 5^\alpha} F_{2 \cdot 5^\alpha + 2}.$$

Da  $F_{2 \cdot 5^\alpha} \equiv 0 \pmod{5^\alpha}$  ist, folgt die Behauptung aus  $(-1)^{2 \cdot 5^\alpha} = 1$ .

Dies ist auch die kleinste Zahl, die diese Bedingung erfüllt, denn  $F_{2 \cdot 5^\alpha + 1} \equiv -1 \pmod{5^\alpha}$ , was man auf gleichem Wege erhält.  $\square$

**Beispiel 6.31** (Die Fibonacci-Folge modulo  $10^\alpha$ ). Aus den beiden vorigen Beispielen und Lemma 6.21 folgt das Korollar:

**Korollar 6.32.** Für ein  $\alpha \in \mathbb{N}$  mit  $\alpha \geq 3$  gilt:

$$\lambda(10^\alpha) = 15 \cdot 10^{\alpha-1}. \quad (6.36)$$

Außerdem gilt:

$$\lambda(10) = 60,$$

$$\lambda(100) = 300.$$

## 6.5 Das Pascalsche Dreieck

Das Pascalsche Dreieck (Abb. 6.5) besteht aus den Binomialkoeffizienten. Im Pascalschen Dreieck ist jede Zahl die Summe der beiden darüberstehenden. An den Zeilenenden steht jeweils die Zahl 1. Der Eintrag der  $n$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte wird mit  $\binom{n}{k}$  bezeichnet und es gilt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \quad (6.37)$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	<b>5</b>	1				
6	1	6	15	<b>20</b>	15	6	1			
7	1	7	<b>21</b>	35	35	21	7	1		
8	1	<b>8</b>	28	56	70	56	28	8	1	
9	<b>1</b>	9	36	84	126	126	84	36	9	1

---

**Abbildung 6.5:** Pascalsches Dreieck. Die Summe der Zahlen in der fett gedruckten Diagonalen entspricht  $55 = F_{10}$ .

---

Lucas (1877, S. 12f) hatte folgende Beziehung der Fibonacci-Zahlen zum Pascalschen Dreieck festgestellt: Die Summe der Zahlen auf einer Diagonalen im Pascalschen Dreieck ist eine Fibonacci-Zahl. Genauer ergibt sich folgender Satz:

**Satz 6.33.**

$$F_{n+1} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \leq n/2}} \binom{n-i}{i}. \quad (6.38)$$

*Beweis.* Durch  $n = 0$  mit  $\binom{0}{0} = 1 = F_1$  und  $n = 1$  mit  $\binom{1}{0} = 1 = F_2$  ist der Induktionsanfang gemacht. Betrachten wir nun den Übergang von  $n - 1$  und  $n$  nach  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_n + F_{n+1} \\ &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \leq \frac{n-1}{2}}} \binom{(n-1)-i}{i} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \leq n/2}} \binom{n-i}{i}. \end{aligned}$$

Bei geraden  $n$  sind die letzten Terme der beiden Summen  $\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1}$  für die erste und  $\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}$  für die zweite Summe. Außerdem hat die erste Summe einen Term weniger als die zweite. Wir setzen den ersten Term der zweiten Summe an den Anfang und fassen mit Gleichung (6.37) je zwei Terme zusammen:

$$\begin{aligned} F_n + F_{n+1} &= \binom{n}{0} + \left( \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} \right) + \cdots + \left( \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1} + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \right) \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Da für alle  $n \in \mathbb{N}$   $\binom{n}{0} = 1$  gilt, können wir schreiben:

$$\begin{aligned} &= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{\frac{n+2}{2}}{\frac{n}{2}} \\ &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \leq \frac{n+1}{2}}} \binom{(n+1)-i}{i}. \end{aligned}$$

Für ungerade  $n$  sind die beiden letzten Terme  $\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} = 1$  bzw.  $\binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}}$ . Beide Summen haben gleich viele Summanden. Da für alle  $n \in \mathbb{N}$   $\binom{n}{n} = 1$  gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} F_n + F_{n+1} &= \binom{n}{0} + \left( \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} \right) \\ &\quad + \cdots + \left( \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-3}{2}} + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}} \right) + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} \\ &= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{\frac{n+1}{2}+1}{\frac{n-1}{2}} + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Das entspricht dem gewünschten Ergebnis.  $\square$

**Bemerkung.** Für eine vereinfachte Betrachtung reicht ein Blick in Abb. 6.5 und man sieht, dass jede Zahl einer Diagonalen die Summe zweier Zahlen der beiden darüberliegenden Diagonalen ist.

Wir bemerken außerdem, dass es hier notwendig ist, zwischen geradem und ungeradem  $n$  zu unterscheiden. Lahr (1981, S. 26f) gibt sogar unterschiedliche Summenformeln für die Diagonalensummen an. Er nennt diese Erscheinung den *Aspekt der alternierenden Struktur*. Diese führt er auf das negative Vorzeichen des zweiten Terms in der Binetformel (5.16) zurück. Dadurch wird abhängig von der Parität von  $n$  entweder addiert oder subtrahiert. Dieser Aspekt wird uns in späteren Abschnitten (7.2, 9.2) wieder begegnen.

**Satz 6.34.** *Seien  $i$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{k+i} = F_{2n+i}. \quad (6.39)$$

*Beweis.* Mit der Binetformel (5.16) ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{k+i} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\Phi^{k+i} - \Phi'^{k+i}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \Phi^i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Phi^k - \Phi'^i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Phi'^k \right) \end{aligned}$$

und nach dem binomischen Lehrsatz folgt:

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \Phi^i (1 + \Phi)^n - \Phi'^i (1 + \Phi')^n \right).$$

Mit (3.6) gilt weiter:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^{2n+i} - \Phi'^{2n+i}) \\ &= F_{2n+i}. \end{aligned}$$

□

Neben diesem Satz führen Becker (1997, S. 6) und Vajda (1989) noch eine Reihe weiterer Summenformeln mit den Binomialkoeffizienten an, die hier nicht berücksichtigt werden.

# Kapitel 7

## Funktionentheorie

### 7.1 Goldener-Schnitt-Suche

Als Grundlage für diesen Abschnitt dienen Storch und Wiebe (1996, Beispiel 14.C.10, S. 287ff) und Vajda (1989, S. 115ff).

Wir betrachten eine konvexe Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , die in einem Punkt  $x_0 \in [0, 1]$  ein globales Minimum besitzt.  $f$  ist auf  $[0, x_0]$  streng monoton fallend und auf  $[x_0, 1]$  streng monoton steigend. Ein oft auftretendes Problem ist es, das Minimum zu approximieren. Dazu kann folgende Methode, die den Goldenen Schnitt einsetzt, verwendet werden.

Um das Minimum zu approximieren, wählen wir  $c$  und  $d$ , sodass  $0 < c < d < 1$ . Falls nun  $f(c) \leq f(d)$ , so ist  $x_0 \in [0, d]$ . Falls  $f(c) \geq f(d)$ , so gilt  $x_0 \in [c, 1]$ .

Im neu gewonnenen Intervall wählen wir wieder zwei Punkte und verfahren auf die gleiche Weise. Durch geschickte Wahl der Teilungspunkte, können wir erreichen, dass es in jedem Näherungsschritt notwendig ist, nur einen neuen Funktionswert zu berechnen und den zweiten Wert vom vorherigen Schritt zu übernehmen. Sei z. B.  $x_0 \in [0, d]$ , dann liegt auch  $c$  in diesem Intervall, und wir brauchen nur einen neuen Funktionswert für  $e \in ]0, c[$  berechnen.

Damit in den einzelnen Schritten jeweils ähnliche Bedingungen herrschen, d. h. die Intervalllängen im gleichen Verhältnis zueinander stehen, sind folgende Bedingungen notwendig:

1. Die Teilungspunkte  $c$  und  $d$  müssen symmetrisch bezüglich der Intervallmitte sein:

$$c = 1 - d.$$

2. Der Teilungspunkt, dessen Funktionswert wir schon kennen, muss das kleinere Intervall im gleichen Verhältnis teilen, wie der Teilungspunkt im vorigen Schritt:

$$d = \frac{c}{d}.$$

Wir erhalten also die Gleichung  $d = \frac{1-d}{d}$ , die äquivalent ist zu  $d^2 + d - 1 = 0$ . Sie hat als einzige positive Lösung  $\delta := \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$ , den „inneren Goldenen Schnitt“.

Wir betrachten statt des Einheitsintervalls nun ein allgemeines Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  und eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit einem globalen Minimum  $x_0 \in ]a, b[$  und der zusätzlichen Eigenschaft, dass  $f$  auf  $[a, x_0]$  streng monoton fallend und auf  $[x_0, b]$  streng monoton steigend ist.

Zur Approximation von  $x_0$  betrachten wir folgenden Algorithmus: Seien  $a_n$  und  $b_n$  die Folgen der Intervallgrenzen und  $c_n$  und  $d_n$  die Folgen der Teilungspunkte, wobei immer gelte  $a_n < c_n < d_n < b_n$ . Für den ersten Schritt setzen wir:

$$\begin{aligned} a_0 &:= a, & b_0 &:= b, \\ c_0 &:= b - \delta(b - a), & d_0 &:= a + b - c_0. \end{aligned}$$

Außerdem sei:

$$g_n := f(c_n), \quad h_n := f(d_n).$$

Für jeden weiteren Schritt unterscheiden wir zwei Fälle:

**Fall 1:**  $g_n \leq h_n$ . Dann liegt  $x_0$  im Intervall  $[a_n, d_n]$  und wir setzen für den nächsten Schritt:

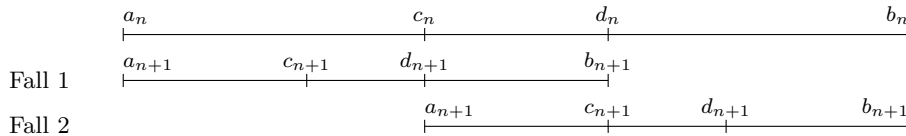
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n, & b_{n+1} &= d_n, \\ d_{n+1} &= c_n, & c_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} - d_{n+1}, \\ g_{n+1} &= f(c_{n+1}), & h_{n+1} &= f(d_{n+1}) = g_n, \end{aligned}$$

wobei im nächsten Schritt nur  $g_{n+1}$  neu berechnet werden muss.

**Fall 2:**  $h_n < g_n$ . Das gesuchte  $x_0$  ist im Intervall  $[c_n, b_n]$  und für den nächsten Schritt gilt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= c_n, & b_{n+1} &= b_n, \\ c_{n+1} &= d_n, & d_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} - c_{n+1}, \\ g_{n+1} &= f(c_{n+1}) = h_n, & h_{n+1} &= f(d_{n+1}). \end{aligned}$$

In diesem Falle ist  $h_n$  der einzige Funktionswert, der neu berechnet werden muss.




---

**Abbildung 7.1:** Intervallverkleinerung bei der Goldenen-Schnitt-Suche in Abhängigkeit von der Lage von  $x_0$ .

---

**Satz 7.1.** *Unter diesen Voraussetzungen definiert  $[a_n, b_n]$  mit  $n \in \mathbb{N}$  eine Intervallschachtelung, sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $x_0 \in [a_n, b_n]$ . Außerdem ist  $b_n - a_n = (b_0 - a_0)\delta^n$ .*

*Beweis.* Wegen der Konstruktion der Intervalle sieht man leicht, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $x_0 \in [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ .

Da in einer fortgesetzten Teilung mit dem Goldenen Schnitt der Minor bezüglich des Major der vorigen Teilung zum Major wird, gilt für die Intervalllängen:  $(b_{n+1} - a_{n+1}) = \delta(b_n - a_n)$ , womit der Satz bewiesen ist.  $\square$

### 7.1.1 Fibonacci-Suche

Bei der praktischen Umsetzung der Goldenen-Schnitt-Suche erweist sich die Irrationalität von  $\Phi$  als unüberwindliches Hindernis. Eine Lösung bietet sich durch Approximation von  $\Phi$  durch die Fibonacci-Zahlen an.

Dabei bestimmt die Wahl der Fibonacci-Zahlen die Genauigkeit der Approximation von  $x_0$  und die Anzahl der Rechenschritte.

Für eine geforderte Toleranz von nicht mehr als  $\varepsilon$  ist demnach eine Fibonacci-Zahl  $F_n$  gesucht, sodass  $F_n \geq \frac{b-a}{\varepsilon}$ , wobei  $[a, b]$  wieder das Such-Intervall ist.

Es ist wieder  $a_0 = a$  und  $b_0 = b$ . Die Teilungspunkte setzen wir bei  $c = c_0 = a + F_{n-2} \frac{b_0 - a_0}{F_n}$  und  $d = d_0 = a + F_{n-1} \frac{b_0 - a_0}{F_n}$ . Es ist leicht nachzuprüfen, dass  $d_0 = b - F_{n-2} \frac{b_0 - a_0}{F_n}$ .

Der Algorithmus ist derselbe wie bei der Goldenen-Schnitt-Suche. Für die Intervalllängen gilt allerdings:  $b_m - a_m = F_{n-m} \frac{b_0 - a_0}{F_n}$ , was aus der Rekursionsgleichung der Fibonacci-Zahlen und der Wahl der Teilungspunkte durch Induktion folgt.

Da  $F_{n-(n-2)} = F_2 = 1$  und  $F_1 = 1$ , gilt  $c_{n-2} = d_{n-2}$  und eine weitere Unterscheidung zwischen den Fällen 1 und 2 ist nicht mehr möglich. Es folgt, dass  $x_0 \in [c_{n-2} - \frac{b_0 - a_0}{F_n}, c_{n-2} + \frac{b_0 - a_0}{F_n}]$ . Zur Erlangung dieses Ergebnisses sind Berechnungen von  $n$  Funktionswerten von  $f$  notwendig.

## 7.2 Affinität zu den hyperbolischen Funktionen

**Definition 7.2.** Die Hyperbelfunktionen  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (Sinus hyperbolicus) und  $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  (Kosinus hyperbolicus) sind folgendermaßen definiert:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (7.1)$$

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (7.2)$$

Die Hyperbelfunktionen folgen der Rekursionsvorschrift der Fibonacci-Zahlen unter Berücksichtigung des Aspekts der alternierenden Struktur (s. Abschnitt 6.5, S. 49). Genauer gilt folgender Satz:

**Satz 7.3.** *Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $\sigma := \ln \Phi$ , dann gelten folgende Beziehungen:*

$$\cosh(\sigma x) + \sinh(\sigma(x+1)) = \cosh(\sigma(x+2)), \quad (7.3)$$

$$\sinh(\sigma x) + \cosh(\sigma(x+1)) = \sinh(\sigma(x+2)). \quad (7.4)$$

*Beweis.* Wir beweisen erst (7.3). Nach der Definition der Hyperbelfunktionen gilt

$$\cosh(\sigma x) + \sinh(\sigma(x+1)) = \frac{1}{2} \left( e^{\sigma x} + e^{-\sigma x} + e^{\sigma(x+1)} - e^{-\sigma(x+1)} \right)$$

da  $e^\sigma = \Phi$ , folgt weiter

$$= \frac{1}{2} \left( \Phi^x + \Phi^{x+1} + \Phi^{-x} - \Phi^{-x-1} \right)$$

und mit Satz 3.3 gilt:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left( \Phi^{x+2} + \Phi^{-(x+2)} \right) \\ &= \cosh(\sigma(x+2)). \end{aligned}$$

Die zweite Formel beweisen wir ähnlich:

$$\begin{aligned}
\sinh(\sigma x) + \cosh(\sigma(x+1)) &= \frac{1}{2} \left( e^{\sigma x} - e^{-\sigma x} + e^{\sigma(x+1)} + e^{-\sigma(x+1)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \Phi^x + \Phi^{x+1} - \Phi^{-x} + \Phi^{-x-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \Phi^{x+2} - \Phi^{-(x+2)} \right) \\
&= \sinh(\sigma(x+2)).
\end{aligned}$$

□

Diesen Sachverhalt können wir ausnutzen, um einige der allgemeinen Fibonacci-Folgen mittels der Hyperbelfunktionen auszudrücken. Wir rufen uns dazu die allgemeine Binetformel (5.15) ins Gedächtnis:

$$G_n = c_1 \Phi^n + c_2 \Phi'^n \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Unser Ziel ist nun, die Binetformel durch die Hyperbelfunktionen auszudrücken. Dadurch ergeben sich einige Einschränkungen. Wir sehen, dass  $c_1$  und  $c_2$  sich nur um das Vorzeichen unterscheiden dürfen. Es muss also  $|c_1| = |c_2|$  gelten. Somit lassen sich nicht alle allgemeinen Fibonacci-Folgen durch die Hyperbelfunktionen ausdrücken. Wir können außerdem unter Ausnutzung des Aspektes der Reziprozität (Satz 3.5)  $\Phi'^n$  durch  $(-\Phi)^{-n}$  ersetzen. Da dieser Term mit der Parität von  $n$  sein Vorzeichen wechselt, müssen wir nach geraden und ungeraden  $n$  unterscheiden. Es sei wieder  $\sigma = \ln \Phi$ . Wir erhalten also folgende Darstellung, in der  $c := |c_1| = |c_2|$  gelte:

$$G_n = \begin{cases} c (\text{sign}(c_1) e^{\sigma n} + \text{sign}(c_2) e^{-\sigma n}) & \text{für gerade } n, \\ c (\text{sign}(c_1) e^{\sigma n} - \text{sign}(c_2) e^{-\sigma n}) & \text{für ungerade } n. \end{cases} \quad (7.5)$$

Wir unterscheiden nun noch, ob  $c_1$  und  $c_2$  gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Für den Fall der gleichen Vorzeichen setzen wir  $c := c_1 = c_2$  und erhalten so die Darstellung:

$$G_n = \begin{cases} c (e^{\sigma n} + e^{-\sigma n}) = 2c \cosh(\sigma n) & \text{für gerade } n, \\ c (e^{\sigma n} - e^{-\sigma n}) = 2c \sinh(\sigma n) & \text{für ungerade } n. \end{cases} \quad (7.6)$$

Für den anderen Fall gelte  $c := c_1 = -c_2$ :

$$G_n = \begin{cases} c (e^{\sigma n} - e^{-\sigma n}) = 2c \sinh(\sigma n) & \text{für gerade } n, \\ c (e^{\sigma n} + e^{-\sigma n}) = 2c \cosh(\sigma n) & \text{für ungerade } n. \end{cases} \quad (7.7)$$

**Beispiel 7.4** (Lucas-Zahlen). Wie schon in Beispiel 5.3 gesehen, ist für die Folge der Lucas-Zahlen  $c_1 = c_2 = 1$ . Dadurch erhalten die Lucas-Zahlen folgende Darstellung durch die Hyperbelfunktionen:

$$L_n = \begin{cases} (e^{\sigma n} + e^{-\sigma n}) = 2 \cosh(\sigma n) & \text{für gerade } n, \\ (e^{\sigma n} - e^{-\sigma n}) = 2 \sinh(\sigma n) & \text{für ungerade } n. \end{cases} \quad (7.8)$$

**Beispiel 7.5** (Fibonacci-Zahlen). Die Fibonacci-Zahlen haben in der Binetformel die Parameter  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$  und  $c_2 = -c_1$  (Beispiel 5.2). Also erhalten wir:

$$F_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} (e^{\sigma n} - e^{-\sigma n}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\sigma n) & \text{für gerade } n, \\ \frac{1}{\sqrt{5}} (e^{\sigma n} + e^{-\sigma n}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\sigma n) & \text{für ungerade } n. \end{cases} \quad (7.9)$$

### 7.2.1 Die Fibonacci-Funktion

Wir können die Binetformel (5.16) als Funktion auffassen, wenn wir statt der ganzzahligen  $n$  komplexe  $z$  als Argumente zulassen. Für das Potenzieren gilt allgemein  $a^x = e^{x \ln a}$ . Da  $\Phi' < 0$  ist, müssen wir das Problem negativer Argumente für den Logarithmus lösen. Die  $e$ -Funktion nimmt in  $\mathbb{C}$  negative Werte an. Genauer gilt wegen  $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ , dass  $e^{(2k+1)\pi i} = -1$  für  $k \in \mathbb{Z}$ . Für den Logarithmus folgt, dass  $\ln -1 = (2k+1)\pi i$  für  $k \in \mathbb{Z}$ . Wir können daher den Logarithmus für  $-1$  auf  $\pi i$  festlegen:  $\ln -1 := \pi i$ . Allgemein gilt somit:

$$\ln x = \ln |x| + \pi i \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, x < 0. \quad (7.10)$$

In unserem speziellen Fall erhalten wir folgende Beziehung, wobei wir auf den Reziprozitätsaspekt (Satz 3.5) zurückgreifen:

$$\ln \Phi' = -\ln \Phi + \pi i. \quad (7.11)$$

Mit diesen Voraussetzungen kommen wir also, dem Ansatz von Lahr (1981, S. 21) folgend, zu folgender Definition:

**Definition 7.6** (Fibonacci-Funktion). Die Funktion  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch

$$L(z) := \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^z - \Phi'^z) \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (e^{z \ln \Phi} - e^{z \ln \Phi'}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (e^{z \ln \Phi} - e^{z(-\ln \Phi + \pi i)}), \end{aligned} \quad (7.13)$$

heißt die *Fibonacci-Funktion*.

Um die Fibonacci-Zahlen auf  $\mathbb{R}$  zu interpolieren, betrachten wir den Realteil der auf  $\mathbb{R}$  eingeschränkten Fibonacci-Funktion.

**Satz 7.7.** *Sei  $x \in \mathbb{R}$ , dann ist*

$$F(x) := \operatorname{Re}(L(x)) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( e^{x \ln \Phi} - e^{-x \ln \Phi} \cos \pi x \right) \quad (7.14)$$

und für  $n \in \mathbb{Z}$  gilt

$$F(n) = L(n) = F_n \quad (7.15)$$

*Beweis.* Es sei  $x \in \mathbb{R}$  und es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(L(x)) &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \left( e^{x \ln \Phi} - e^{x(-\ln \Phi + \pi i)} \right) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \left( e^{x \ln \Phi} - e^{-x \ln \Phi} e^{x \pi i} \right) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \left( e^{x \ln \Phi} - e^{-x \ln \Phi} (\cos \pi x + i \sin \pi x) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( e^{x \ln \Phi} - e^{-x \ln \Phi} \cos \pi x \right). \end{aligned}$$

Da  $\sin(\pi n) = 0$  und  $\cos(\pi n) = (-1)^n$  für  $n \in \mathbb{Z}$ , gilt

$$e^{-n \ln \Phi} (\cos \pi n + i \sin \pi n) = e^{-n \ln \Phi} (-1)^n = (-\Phi)^{-n} = \Phi^n,$$

und Gleichung (7.15) folgt nach der Definition der Binetformel.  $\square$

$F$  hat einen periodischen Anteil, der für kleinere Argumente stärker zu Tage tritt und für große  $x$  verschwindet. Vergleiche auch den Graphen von  $F$  (Abb. 7.2).

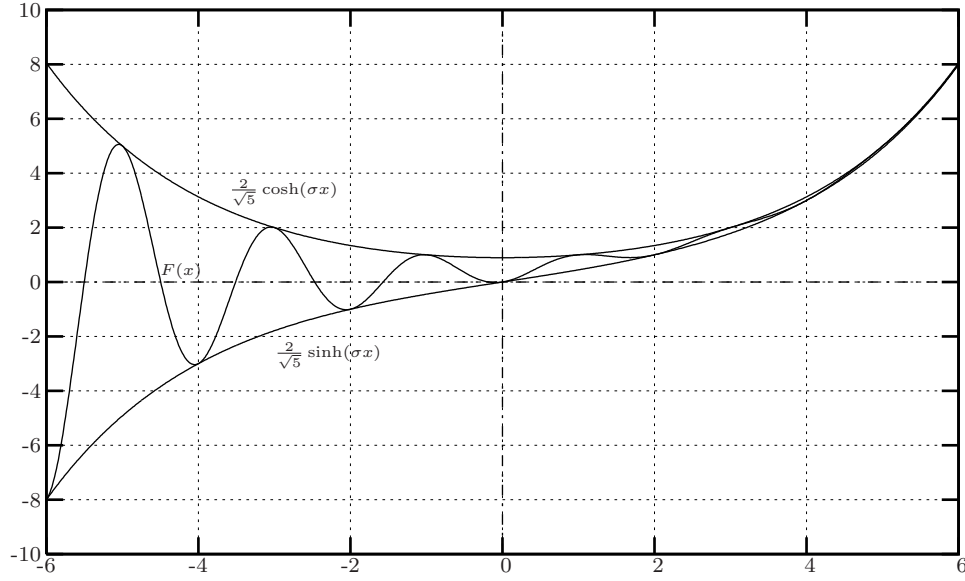
**Satz 7.8.**  *$F(x)$  hat die Umhüllenden  $\frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\sigma x)$  und  $\frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\sigma x)$  mit  $\sigma = \ln \Phi$ .*

*Beweis.* Da  $\cos(\pi x) = 1$  für gerade  $x \in \mathbb{Z}$  bzw.  $\cos(\pi x) = -1$  für ungerade  $x \in \mathbb{Z}$  und  $|\cos(\pi x)| \leq 1$ , ist nach Beispiel 7.5:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\sigma x) \leq F(x) \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\sigma x).$$

Die Gleichheit gilt jeweils abwechselnd für gerade bzw. ungerade  $x \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

Da  $F_0 = 0$  gilt auch  $F(0) = L(0) = 0$ . Die Frage ist nun, ob es außer dieser noch weitere Nullstellen von  $L(z)$  in  $\mathbb{C}$  gibt.



**Abbildung 7.2:** Der Realteil der auf  $\mathbb{R}$  eingeschränkten Fibonacci-Funktion mit den Umhüllenden  $\frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\sigma x)$  und  $\frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\sigma x)$ , wobei  $\sigma = \ln \Phi$ .

**Satz 7.9.** Seien  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\tau := \frac{\pi}{2 \ln \Phi} = \frac{\pi}{2\sigma}$ . Dann sind die

$$z_k = \frac{-2\tau^2}{1 + \tau^2}k + i \frac{2\tau}{1 + \tau^2}k = (i - \tau) \frac{2\tau}{1 + \tau^2}k$$

genau die Nullstellen von  $L(z)$ .

*Beweis.*  $L(z) = 0$  ist äquivalent zu  $e^{z \ln \Phi} = e^{z \ln \Phi'}$ . Wir können auf beiden Seiten den Logarithmus anwenden und mit (7.11) erhalten wir:

$$z \ln \Phi = z\pi i - z \ln \Phi.$$

Da der Logarithmus  $2\pi i$ -periodisch ist, gilt für  $k \in \mathbb{Z}$  weiter:

$$z \ln \Phi = z\pi i - z \ln \Phi + 2k\pi i.$$

Mit  $z = (x + yi)$  erhalten wir aus dem Realteil der Gleichung

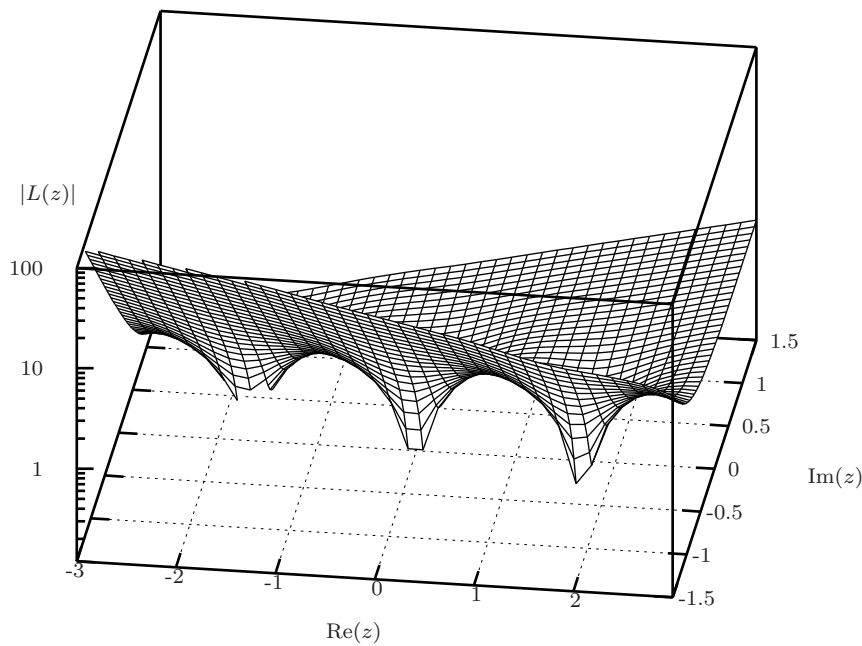
$$x = -y \frac{\pi}{2 \ln \Phi} = -y\tau$$

und aus dem Imaginärteil

$$y = (2k + x) \frac{\pi}{2 \ln \Phi} = (2k + x)\tau.$$

Durch Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung erhalten wir nach Umstellen

$$y = \frac{2\tau}{1 - \tau^2}k$$




---

**Abbildung 7.3:** Der Absolutbetrag der Fibonacci-Funktion über  $\mathbb{C}$  mit logarithmisch skaliertem Kote. Die Nullstellen sind nur angedeutet vorhanden. Sie haben die Form  $z_k = (-\tau + i)\frac{2\tau}{1+\tau^2}k$ , wobei  $\tau = \frac{\pi}{2\ln\Phi}$  und  $k \in \mathbb{Z}$ .

---

und weiter

$$x = \frac{-2\tau^2}{1 + \tau^2}k.$$

Insgesamt ist also

$$z_k = \frac{-2\tau^2}{1 + \tau^2}k + i\frac{2\tau}{1 - \tau^2}k = (i - \tau)\frac{2\tau}{1 - \tau^2}k,$$

wodurch wir die Behauptung bewiesen haben. □

# Kapitel 8

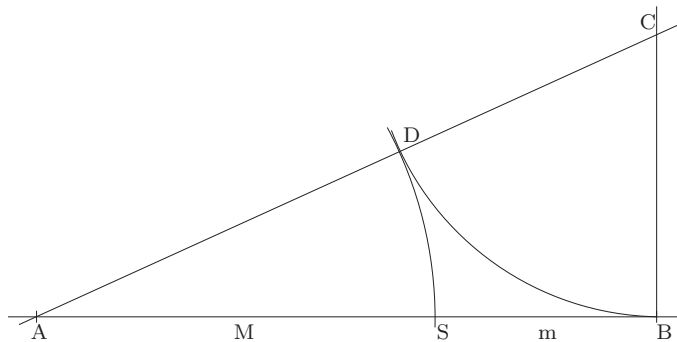
## Geometrie

### 8.1 Geometrie und Goldener Schnitt

#### 8.1.1 Konstruktion des Goldenen Schnittes

Aus der Menge der verschiedenen Arten den Goldenen Schnitt zu konstruieren, wie sie zum Beispiel von Beutelspacher (1988, S. 21ff) gezeigt werden, stelle ich hier nur einige vor.

Die erste Konstruktion des Goldenen Schnittes wird sehr häufig angetroffen. Sei  $\overline{AB}$  eine Strecke. Wir fällen das Lot  $\overline{BC}$  von  $\overline{AB}$  mit  $|\overline{BC}| = |\overline{AB}|/2$ . Diese Länge von C auf  $\overline{BC}$  abgeschlagen, ergibt den Punkt D. Der Kreis um A mit Radius  $|\overline{AD}|$  schneidet die Gerade AB im Punkt S.



---

**Abbildung 8.1:** Konstruktion des Goldenen Schnittes S auf der Geraden  $\overline{AB}$ .

---

**Satz 8.1.** S teilt  $\overline{AB}$  im Goldenen Schnitt, d. h.  $|\overline{AB}|/|\overline{AS}| = |\overline{AS}|/|\overline{SB}| = \Phi$ .

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $|\overline{AB}| = 1$ . Dann ist

$$|\overline{AC}| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

und

$$|\overline{AD}| = |\overline{AS}| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}.$$

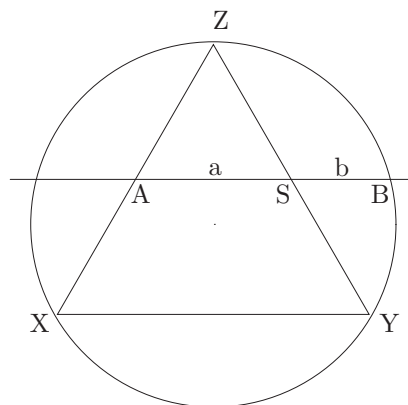
Damit folgt:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AS}|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{1}{\Phi - 1} = \Phi.$$

□

Eine zweite Konstruktion des Goldenen Schnittes geht laut Beutelspacher (1988, S. 22) auf George Odom zurück und stammt aus dem Jahr 1982.

Wir konstruieren ein gleichseitiges Dreieck  $XYZ$  mit Seitenlänge  $2a$  und dem Umkreis  $K$ . Seien  $A$  und  $S$  die Mittelpunkte der Seiten  $\overline{XZ}$  und  $\overline{YZ}$ . Die Gerade durch  $A$  und  $S$  trifft den Umkreis in den Punkten  $C$  und  $B$  (s. Abbildung 8.2).




---

**Abbildung 8.2:** Konstruktion des Goldenen Schnittes an einer Geraden durch die seitenhalbierenden Punkte eines gleichseitigen Dreiecks mit Umkreis.  $S$  teilt  $\overline{AB}$  im Goldenen Schnitt.

---

**Satz 8.2.**  $S$  teilt  $\overline{AB}$  im Goldenen Schnitt.

*Beweis.* Da die Seitenlänge des Dreiecks  $2a$  ist, gilt  $|\overline{AS}| = a$ . Es sei  $b := |\overline{SB}|$ . Aus Symmetriegründen gilt  $|\overline{AC}| = b$ . Der Sehensatz besagt: „Schneiden sich in einem Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Abschnittslängen der einen

Sehne gleich dem Produkt der Abschnittslängen der anderen.“ (Gottwald u. a., 1995, S. 189) Wir wenden ihn auf die Sehnen  $\overline{CB}$  und  $\overline{YZ}$  an und erhalten:

$$a^2 = |\overline{YS}| \cdot |\overline{SZ}| = |\overline{SB}| \cdot |\overline{SC}| = b(a + b).$$

Teilen wir nun die Gleichung durch  $b^2$ , so erhalten wir:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1.$$

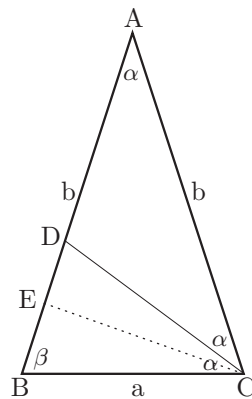
Diese Gleichung kennen wir bereits als Gleichung (3.3) und wir folgern:

$$\frac{a}{b} = \Phi.$$

□

### 8.1.2 Das goldene Dreieck

**Definition 8.3** (Goldenes Dreieck). Ein Dreieck heißt golden, falls es die Seitenlängen  $a$ ,  $\Phi \cdot a$ ,  $\Phi \cdot a$  hat.




---

**Abbildung 8.3:** Goldenes Dreieck. Die Seitenlängen der Schenkel sind nach Definition  $b = \Phi \cdot a$ . Für die Winkel gilt:  $\beta = 2\alpha$ .

---

**Satz 8.4.** Sei  $ABC$  ein goldenes Dreieck mit der Basis  $a$ , dem Basiswinkel  $\beta$  und dem Winkel in der Spitze  $\alpha$ . Dann ist  $\beta = 2\alpha$ .

*Beweis.* Da das Dreieck golden ist, ist es gleichschenkelig und die Schenkel haben die Seitenlänge  $b = \Phi \cdot a$ . Wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ist der Basiswinkel spitz, und wir können wie in Zeichnung 8.3 die Länge  $a$  von  $C$  aus auf  $\overline{AB}$  abschlagen und erhalten den Punkt  $D$ . Das so gewonnene

Dreieck BCD ist nach seiner Konstruktionsart gleichschenkelig mit Basiswinkel  $\beta$  und damit ähnlich zu ABC. Daraus folgt, dass  $|\overline{BD}| = \Phi^{-1} \cdot a = \Phi \cdot a - a$ . Daraus wiederum folgt, dass  $|\overline{AD}| = \Phi \cdot a - (\Phi \cdot a - a) = a$ , woraus wir folgern, dass das Dreieck ADC gleichschenkelig mit Schenkellänge  $a$  und Basiswinkel  $\alpha$  ist. Betrachten wir den Winkel in C, so sehen wir, dass  $\beta = 2\alpha$ .  $\square$

**Korollar 8.5.** Da die Winkelsumme  $2\beta + \alpha = 5\alpha = \pi$  ist, gilt  $\alpha = \pi/5$  und  $\beta = 2\pi/5$ . Bei einem Vollkreis von  $360^\circ$  entspricht dies den Winkeln  $\alpha = 36^\circ$  und  $\beta = 72^\circ$ .

Wir wollen nun das gleiche Dreieck unter der Voraussetzung, dass  $b = 1$  ist, betrachten. Für die Basis gilt dann:  $a = \Phi - 1$ . Im Dreieck BCD zeichnen wir die Höhe ein. Daraus ergibt sich der Punkt E der die Basis  $\overline{BD}$  halbiert. Nun betrachten wir das rechtwinkelige Dreieck AEC. Die Seite  $\overline{AE}$  hat, da  $|\overline{BD}| = \Phi^{-2}$  ist, die Länge  $1 - \frac{\Phi^{-2}}{2} = \frac{\Phi}{2}$ . Nach dem Satz von Pythagoras gilt außerdem:  $|\overline{CE}| = \frac{1}{2}\sqrt{3 - \Phi}$ . Daraus folgt direkt der nächste Satz:

**Satz 8.6.** *Es gelten folgende Gleichungen:*

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\Phi}{2}, \quad (8.1)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3 - \Phi}. \quad (8.2)$$

Durch Umformen mithilfe der Gleichungen  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$  und  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  ergibt sich:

**Korollar 8.7.**

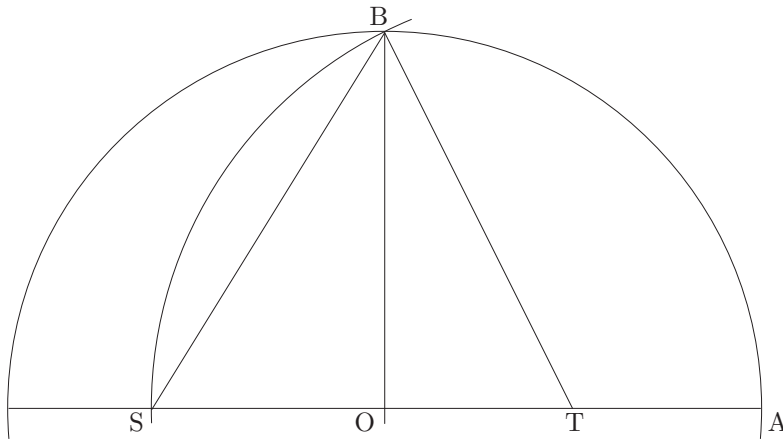
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\Phi^{-1}}{2}, \quad (8.3)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \Phi}. \quad (8.4)$$

### 8.1.3 Das Fünfeck

Aus der Tatsache, dass der Scheitelwinkel eines goldenen Dreiecks  $\pi/5$  misst, ist klar, dass man aus 10 gleich großen goldenen Dreiecken ein 10-Eck zusammensetzen kann. Außerdem folgt daraus, dass ein 10-Eck das in einen Kreis mit Radius  $r$  eingeschrieben ist, die Seitenlänge  $r \cdot \Phi^{-1}$  hat.

Aus Gleichung (8.2) von Satz 8.6 folgt, dass die Seite des Fünfecks in einem Kreis mit Radius  $r$  die Seitenlänge  $2r \cdot \sin(\pi/5) = \sqrt{3 - \Phi}$  haben muss.




---

**Abbildung 8.4:** Konstruktion eines Fünfecks. T halbiert  $\overline{OA}$  und S entsteht durch den Kreis um T mit Radius  $|\overline{TB}|$ .  $\overline{SB}$  ist die Fünfeckseite und  $\overline{OS}$  die Seite eines Zehnecks.

---

Wir betrachten also folgende Konstruktionsvorschrift, wie sie in Abbildung 8.4 gegeben ist.

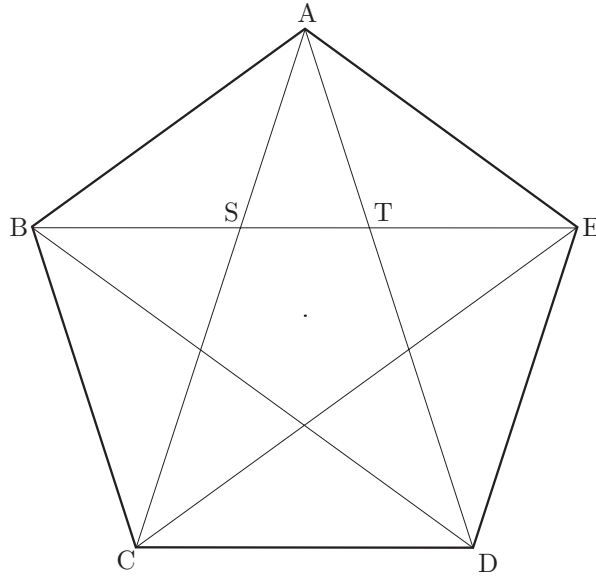
In einen Kreis um den Punkt O mit Radius  $r$  schreiben wir einen waagerechten und einen senkrechten Durchmesser ein, sie treffen in den Punkten A bzw. B den Kreis. Der Punkt T halbiert den Radius  $\overline{OA}$ . Der Kreis um T mit Radius  $|\overline{TB}|$  trifft in Punkt S den waagerechten Durchmesser.

**Satz 8.8.** *In dieser Konstruktion ist  $|\overline{OS}|$  die Seitenlänge eines in den Kreis eingeschriebenen Zehnecks.  $|\overline{SB}|$  ist die Seitenlänge eines Fünfecks in diesem Kreis.*

*Beweis.* Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $r = 1$ . Dann hat die Strecke  $\overline{OT}$  die Länge  $\frac{1}{2}$  und mit dem Satz von Pythagoras folgt, dass  $|\overline{TB}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Also hat die Strecke  $\overline{OS}$  die Länge  $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \Phi - 1 = \Phi^{-1}$ . Das ist die geforderte Länge für ein Zehneck.

Wieder mit Pythagoras folgt:  $|\overline{SB}| = \sqrt{1 + (\Phi - 1)^2} = \sqrt{3 - \Phi}$ . Da dies die gewünschte Seitenlänge für ein Fünfeck ist, ist der Satz bewiesen.  $\square$

Die Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks ergeben zusammen das so genannte *Pentagramm*, den Fünfsterne. Wir betrachten nun das regelmäßige Fünfeck ABCDE mit eingeschriebenem Pentagramm wie in Abbildung 8.5. Dabei wird die Diagonale  $\overline{BE}$  von den Diagonalen  $\overline{AC}$  und  $\overline{AD}$  in den Punkten S und T geschnitten.




---

**Abbildung 8.5:** Fünfeck mit eingeschriebenem Pentagramm. Die Punkte S und T teilen die Diagonalen im Goldenen Schnitt. Insbesondere verhalten sich die Diagonalen zu den Fünfeckseiten im Goldenen Schnitt. Daher ist das Dreieck ACD ein goldenes.

---

**Satz 8.9.** Sei  $P = ABCDE$  das oben beschriebene Fünfeck mit Diagonalen. Die Seitenlänge von  $P$  sei  $a$ . Dann haben die Diagonalen die Länge  $\Phi \cdot a$ , und der Punkt S teilt die Diagonale  $\overline{AC}$  im Goldenen Schnitt.

*Beweis.* Als erstes stellen wir fest, dass je eine Diagonale parallel zu einer der Seiten ist. Dies folgt aus der Gleichheit der Winkel und Seitenlängen im Fünfeck. Also ist CDES ein Parallelogramm und  $|\overline{CS}| = |\overline{ED}| = a$ . Betrachten wir nun die beiden Diagonalen durch S und die Seite  $\overline{AB}$  mit der gegenüberliegenden zu ihr parallelen Diagonalen  $\overline{CE}$ . Dann folgt aus dem Strahlensatz:

$$\frac{|\overline{SC}|}{|\overline{AS}|} = \frac{|\overline{CE}|}{|\overline{AB}|}.$$

Da aber  $|\overline{SC}| = |\overline{AB}|$  und  $|\overline{AC}| = |\overline{CE}|$  ist, folgt:

$$\frac{|\overline{SC}|}{|\overline{AS}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{SC}|}. \quad (8.5)$$

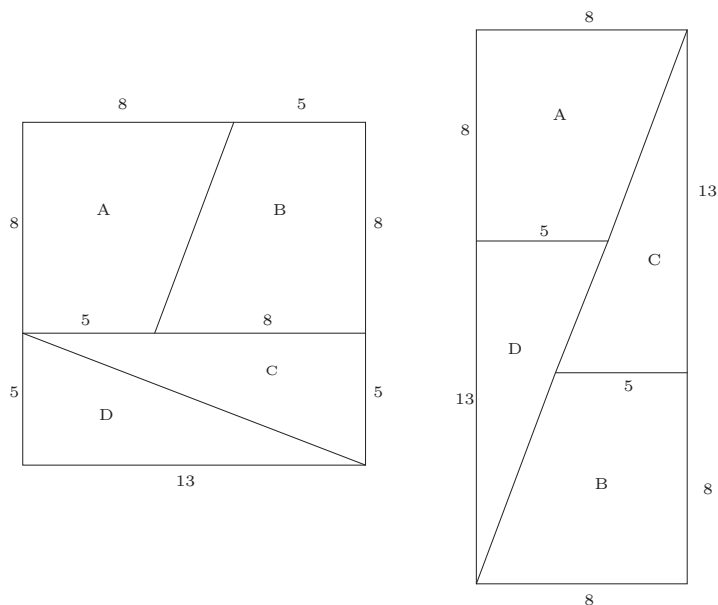
Da außerdem  $|\overline{AC}| = |\overline{AS}| + |\overline{SC}|$ , ist Gleichung (8.5) die Definition für den Goldenen Schnitt und es folgt, dass S die Diagonale  $\overline{AC}$  im Goldenen Schnitt teilt. Weiter folgt:  $|\overline{AC}| = a + a\Phi^{-1} = a + a(\Phi - 1) = \Phi \cdot a$ .  $\square$

**Korollar 8.10.** Aus dem Satz folgt sofort, dass das Dreieck ACD ein goldenes Dreieck ist.

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Anwendungen decken bei Weitem nicht alle Vorkommen des Goldenen Schnittes in der Geometrie ab. So habe ich einige Konstruktionsverfahren nicht berücksichtigt und das goldene Rechteck nicht behandelt. Außerdem blieben die Vorkommen des Goldenen Schnittes bei den Platonischen Körpern Ikosaeder und Dodekaeder unberücksichtigt. Leider würden weitere Ausführungen zu diesem Thema den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

## 8.2 Die Fibonacci-Zahlen in der Geometrie: Ein Trugschluss

Dieser Abschnitt geht auf Beutelspacher (1988, S. 91ff) zurück. Der hier beschriebene Sachverhalt ist jedoch in vielen Rätselspielen in verschiedenen Varianten zu finden.




---

**Abbildung 8.6:** Geometrischer Trugschluss: Die beiden Figuren haben nicht die gleiche Fläche, obwohl suggeriert wird, dass sie aus den gleichen Komponenten bestehen.

---

Ein Quadrat der Seitenlänge  $F_n$ ,  $n \geq 3$  wird entsprechend Abbildung 8.6 in die Flächenstücke A, B, C und D aufgeteilt, wobei die in der Abbildung angegebenen Längen durch entsprechende andere Fibonacci-Zahlen ersetzt werden müssen.

Dann hat das Quadrat die Fläche  $F_n^2$  und die Fläche des Rechtecks misst  $F_{n-1}F_{n+1}$ . Die Beziehung der beiden Zahlen zueinander beschreibt die Simpson-Identität (Gleichung 5.26):

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}.$$

Daraus folgt, dass sich Figuren dieser Form immer um eine Flächeneinheit unterscheiden.

Die Täuschung liegt nun darin, dass die Steigungen der schrägen Seiten von A und B nicht denen der Flächenteile C und D entsprechen und es in der rechten Figur zu Überlappungen, bzw. Leerräumen kommt, je nach Parität von  $n$ .

Da jedoch die Quotienten benachbarter Fibonacci-Zahlen  $\Phi$  approximieren, ist der Unterschied der Steigungen relativ gering und nur schwer zu erkennen.

## Kapitel 9

# Außerhalb der Mathematik

Außerhalb der Mathematik treten die Fibonacci-Zahlen in unterschiedlichsten Erscheinungen und Lebensgebieten auf. Einem Phänomen aus der Biologie sind wir bereits begegnet, als wir den Stammbaum einer Drohne (Beispiel 6.4) betrachteten.

Auch in der Wirtschaft treten Fibonacci-Zahlen auf und zwar bei Konjunkturzyklen in Finanzmärkten. Nach dem so genannten *Wellenprinzip von Elliott* treten dabei in den Verhältnissen von Impuls und Korrektur Quotienten von Fibonacci-Zahlen auf (FAZ, 2003). Da sich der Gegenstand aufgrund seiner Komplexität meiner Ansicht nach einer einfachen Untersuchung entzieht, soll es bei dieser Erwähnung bleiben.

Auch auf das Auftreten des Goldenen Schnittes in Kunst und Architektur werde ich hier nicht weiter eingehen, zum Einen weil der Fokus dieser Arbeit auf den Fibonacci-Zahlen liegt und zum Anderen weil vieles auf diesem Gebiet Interpretationssache ist. Nicht zu leugnen ist jedenfalls, dass der Goldene Schnitt als Teilungsverhältnis als harmonisch empfunden wird und deshalb in der bildenden Kunst Eingang gefunden hat. Vergleiche hierzu auch Beutelspacher (1988, Kapitel 10).

### 9.1 Phyllotaxis

*Phyllotaxis* ist der botanische Fachbegriff für „Blattstellung“, also die Art, wie Blätter einer Pflanze am Stängel angeordnet sind; wobei ein etwas allgemeinerer Blattbegriff zum Tragen kommt: Als Blätter gelten nicht nur die „normalen“ Blätter, sondern auch Blütenblätter und Fruchtblätter, wie z. B.

die Schuppen eines Tannenzapfens. Man spricht von einer *wechselständigen* Blattanordnung, wenn keine zwei Blätter an der gleichen Stängelhöhe entspringen.

Die *Grundspirale* einer wechselständigen Blattanordnung entsteht, wenn man eine Linie um den Stängel zieht, die von unten nach oben alle Blattansätze der Reihe nach berührt. Dabei ist der Winkel von einem Blatt zum nächsten bei allen Blättern gleich. Dieser Winkel heißt *Divergenz* der Blätter. Die Divergenz ist immer ein Bruchteil des vollen Kreises, woraus folgt, dass nach einer bestimmten Anzahl von Blättern ein Blatt wieder genau über dem ersten steht. Die senkrechten Linien, die so entstehen, nennt man *Blattzeilen* oder *Orthostichen*. Ein *Zyklus* der Grundspirale ist der Teil der Spirale, der von einem Ausgangsblatt zu dem ersten senkrecht darüber entspringenden Blatt führt (Wikipedia, Vergl. Phyllotaxis 14. 9. 2004).

Es zeigt sich, dass für die Divergenz Brüche der Form  $\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$  auftreten, die wir aber, indem wir die negative Drehrichtung betrachten, als Brüche benachbarter Fibonacci-Zahlen verstehen können. Bei einer  $\frac{1}{2}$  Phyllotaxis befinden sich die Blätter abwechselnd auf zwei gegenüberliegenden Seiten des Zweiges (Ulme, Linde). Eine  $\frac{1}{3}$  Phyllotaxis finden wir bei Buche und Hasel. Eiche und Aprikose weisen eine  $\frac{2}{5}$  Blattstellung auf (Coxeter, 1961, S. 169).

Ein weiteres Phänomen innerhalb der Phyllotaxis, an dem die Fibonacci-Zahlen beobachtet werden können, ist die Anordnung der Röhrenblüten eines Korbblütlers, wie zum Beispiel der Sonnenblume oder des Gänseblümchens. Hier bilden die Röhrenblüten, also die Einzelblüten im Innern des Korbes ein doppeltes Spiralmuster, wobei die Anzahl der Links- und Rechtsspiralen meist zwei benachbarte Fibonacci-Zahlen, in ganz seltenen Fällen zwei benachbarte Lucas-Zahlen sind (Becker, 1997, Vergl. S. 26). Eine ähnliche Erscheinung ist an den Fruchtspezeln der Ananas zu beobachten. Diese ordnen sich zu drei Spiralklassen, deren Anzahlen der Einzelspiralen drei benachbarte Fibonacci-Zahlen (meist 5, 8 und 13) sind.

Diesem Phänomen liegt die Art zu Grunde, in der neue Triebe entstehen. Wenn wir die Wachstumsregion der Pflanze oder des jeweiligen Triebes vereinfacht als Kegel betrachten, so entstehen die Triebe nacheinander in der Nähe der Kegelspitze und wandern infolge der Wachstums nach unten. Der nächste Trieb entsteht dann um den Divergenzwinkel  $D$  und einen Höhenunterschied  $h$  ver-

setzt. Wir wollen ein konstantes Wachstum annehmen, sodass  $h$  immer gleich bleibt. Nun scheint es so zu sein, dass der so genannte *Goldene Winkel* von  $(\Phi - 1)2\pi = \frac{2\pi}{\Phi}$ , was etwa  $222,49^\circ$  bzw.  $137,51^\circ$  im anderen Drehsinn entspricht, bevorzugt wird. Ein entsprechendes Experiment wurde von Douady und Couder<sup>1</sup> durchgeführt (Stewart, 1998, S. 169f). Natürlich kann dies nur als Tendenz und nicht als Gesetz gelten, denn es sind bei Weitem nicht alle Pflanzenarten, die den Goldenen Winkel als Divergenzwinkel besitzen.

Wir wollen nun die Frucht mit den Fruchtblättern (Tannenzapfen) bzw. Fruchtspelzen (Ananas) vereinfacht als Zylinder mit Umfang 1 betrachten. Als Divergenzwinkel nehmen wir den Goldenen Winkel an, der ein Fortschreiten der Zellentstehung am Umfang um  $\Phi^{-1}$  nach rechts, bzw.  $\Phi^{-2}$  nach links bedeutet.

Da die Divergenz irrational ist, kann es keine Senkrechten Orthostichen geben und der Zyklus der Grundspirale ist nicht definiert.

Abbildung 9.1 (Coxeter, 1961, vergl. S. 171) zeigt ein solches Modell eines Zylinders, der an der Stelle der ersten Zelle aufgeschnitten ist. Der Höhenunterschied zweier aufeinanderfolgender Zellen beträgt 0,0069 in Einheiten des Umfangs. Man kann in der Zeichnung deutlich erkennen, dass die nächsten Nachbarn der Zelle im Ursprung die Zellen mit den Nummern 5, 8 und 13 sind. Daraus ergibt sich auch die Anzahl der Spiralen, die parallel zueinander verlaufen. Allgemein kann man sehen dass die Zellen mit Fibonacci-Zahlen sich der Ausgangssenkrechten ( $x = 0$ ) nähern. Gleiches gilt auch für die Lucas-Zahlen. Wir können den Zylindermantel als  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$  auffassen. Wir betrachten also Äquivalenzklassen von Elementen aus  $\mathbb{R}^2$ , die sich in der ersten Komponente um eine ganze Zahl unterscheiden. Als Repräsentantensystem wählen wir die Menge

$$Z := \{(x, y) : 0 \leq x < 1, y \in \mathbb{R}\} = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$$

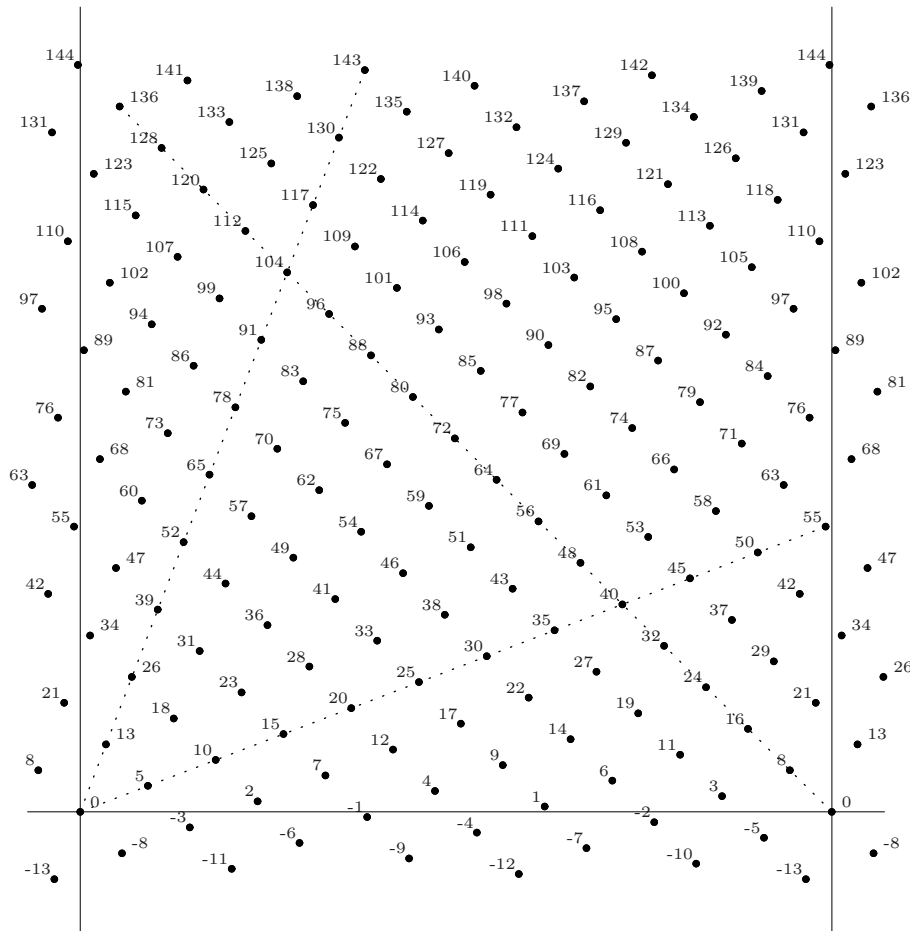
und bezeichnen die Äquivalenzklassen durch  $[(x, y)] = ([x], y)$ .

Da  $\Phi^{-1} = \Phi - 1$  und  $\Phi^{-2} = 2 - \Phi$  ist, gilt  $[\Phi] = [\Phi^{-1}] = -[\Phi^{-2}]$ , was uns erlaubt, die Grundspirale in beiden Richtungen zu betrachten.

---

<sup>1</sup> Vergleiche hierzu auch: DOUADY, S.; COUDER, Y.: *Phyllotaxis as a Physical Self-Organized Process*. In: Physical Review Letters 68 (1992) S. 2098–2101.

Ein Video des Experiments ist unter <http://www.math.smith.edu/~phy110/Gallery/index.html> im Internet auf den Seiten des Smith College Department of Mathematics zu finden. Das Institut stellt eine sehr umfangreiche Dokumentation zur Phyllotaxis zur Verfügung (<http://www.math.smith.edu/~phy110/>).



**Abbildung 9.1:** Zylindrisches Modell der Zellanordnung, z. B. der Fruchtspelzen einer Ananas. Der Divergenzwinkel ist hier  $D = 2\pi/\Phi$  (nach rechts) und die Höhenprogression  $h = 0,0069$ . Die Zahlen geben die fortlaufende Nummerierung der Zellen entlang der Grundspirale an. Die dünnen Linien heben die augenfälligen Spiralen hervor. Diese Abbildung wurde durch ein einfaches Script erzeugt, das die Wahl verschiedener Parameter zulässt.

Die Punkte, die wir betrachten, haben also die Form  $P_n := ([n\Phi], nh)$ , wobei  $n \in \mathbb{Z}$  ist und  $h$  den Höhenunterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zellen angibt.

Da  $\Phi$  durch Brüche benachbarter Fibonacci-Zahlen approximiert wird, gilt

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} + \frac{\rho}{F_n} = \Phi \quad n > 0,$$

wobei für den Fehler  $\rho$  für alle  $n > 0$  gilt, dass  $|\rho| < 1$ . Es folgt daher, dass  $\rho = F_n\Phi - F_{n+1} = [F_n\Phi]$ .

Also haben die Punkte mit Fibonacci-Zahlen im Index die Form:

$$P_{F_n} = (F_n\Phi - F_{n+1}, F_nh).$$

Welche Punkte den kleinsten Abstand zu 0 haben, ergibt sich aus dem Wachstumsfortschritt  $h$ . Je kleiner  $h$ , desto höher die Fibonacci-Zahlen, deren zugehörige Punkte Nachbarn von 0 sind.

Sind die Punkte  $P_{F_{k-1}}$ ,  $P_{F_k}$  und  $P_{F_{k+1}}$  die Nachbarzellen von 0, so findet der Übergang zu den Nachbarn  $P_{F_k}$ ,  $P_{F_{k+1}}$  und  $P_{F_{k+2}}$  genau dann statt, wenn der Winkel, den  $P_{F_k}$  und  $P_{F_{k+1}}$  mit  $P_0$  einschließen, durch Kleinerwerden von  $h$  orthogonal wird. Dies entspricht genau der Bedingung

$$(F_k\Phi - F_{k+1})(F_{k+1}\Phi - F_{k+2}) + F_k F_{k+1} h^2 = 0. \quad (9.1)$$

Mit Satz 3.2 können die beiden Klammerausdrücke in (9.1) zu  $(-1)^{k+1}\Phi^{-k}$  bzw. zu  $(-1)^{k+2}\Phi^{-k-1}$  umgewandelt werden. Insgesamt erhalten wir also:

$$h = \frac{1}{\Phi^{k+1/2}\sqrt{F_k F_{k+1}}}.$$

Daraus ergibt sich der folgende Satz.

**Satz 9.1.** *Gilt in dem oben dargestellten zylindrischen Modell, dass die Wachstumsrate  $h$ , also der Höhenabstand zweier aufeinander folgender Sprosse in Einheiten des Stängelumfanges, die Beziehung*

$$\frac{1}{\Phi^{k-1/2}\sqrt{F_{k-1}F_k}} < h < \frac{1}{\Phi^{k+1/2}\sqrt{F_k F_{k+1}}}$$

*einhält, so sind die Anzahl der Spiralen in verschiedenen Richtungen  $F_{k-1}$ ,  $F_k$  und  $F_{k+1}$ . Innerhalb dieser Grenzen bietet sich der Wert*

$$h = F_k^{-1}\Phi^{-k}$$

*als bequeme Wahl an.*

**Beispiel 9.2.** Für das Modell der Ananas in Abbildung 9.1 haben wir einen Wert von  $h = 0,0069$  gewählt, was etwa  $\frac{1}{F_6\Phi^6} = \frac{1}{8\Phi^6} \approx 0,006966$  entspricht.

Das Thema Phyllotaxis und Fibonacci-Zahlen bzw. Goldener Schnitt ist äußerst umfangreich und vielgestaltig. Außer den bereits zitierten Autoren beschäftigen sich auch noch Conway, John H. und Guy, Richard K. (1997, S. 128ff), Beutelspacher (1988, S. 123ff), Dunlap (1997, S. 123) und eine Reihe weiterer Autoren mit dem Thema. Das Smith College Department of Mathematics stellt unter <http://www.math.smith.edu/~phyllo/Applets/index.html> Java-Applets bereit, mit denen in dynamischer Weise Zellanordnungen studiert werden können.

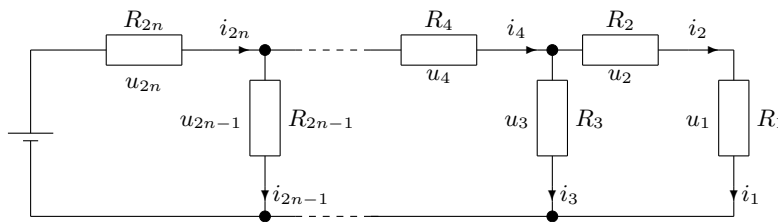
## 9.2 Elektrische Netzwerke

In der Modellierung von elektrischen Netzwerken kann die Fibonacci-Funktion eingesetzt werden, wie Lahr in seiner Dissertation (Lahr, 1981) darlegt. Wir werden hier nur das grundlegende Phänomen untersuchen, an dem die Fibonacci-Zahlen zutage treten.

Als Grundlage aus der Physik dienen uns die Bezeichnungen für Spannung ( $U$ ), Strom ( $I$ ) und Widerstand ( $R$ ), das Ohmsche Gesetz, das die Beziehung zwischen Spannung, Strom und Widerstand beschreibt

$$U = I \cdot R \quad (9.2)$$

und die Kirchhoffschen Gesetze, welche besagen, dass in einem Knoten die Summe der ein- und ausgehenden Ströme gleich sein muss (Knotenregel), und dass sich die Spannungen in einem geschlossenen Kreis eines Strom-Netztes zu Null addieren müssen (Maschenregel).




---

**Abbildung 9.2:** Gamma-II Vierpolkette mit den Widerständen  $R_m$  an denen die Spannungen  $u_m$  abgegriffen werden und durch die die Ströme  $i_m$  fließen.

---

Wir betrachten eine so genannte Gamma-II Vierpolkette, wie in Abbildung 9.2 gezeigt, bei der alle Widerstände gleich sind:

$$R := R_1 = R_2 = \dots = R_{2n}.$$

Dann gilt für einen Strom mit geradem Index  $i_{2n}$  und für  $n \geq 2$  wegen der Kirchhoffschen Knotenregel, dass

$$i_{2n} = i_{2n-1} + i_{2n-2}. \quad (9.3)$$

Für Spannungen mit ungeradem Index  $u_{2n+1}$  und für  $n \geq 1$  gilt wegen der Maschenregel

$$u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1}. \quad (9.4)$$

Wir wenden auf diese Gleichung das Ohmsche Gesetz (9.2) an und zusammen mit (9.3) gilt dann folgende Rekursionsbeziehung:

$$i_n = i_{n-1} + i_{n-2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \quad (9.5)$$

Außerdem ist leicht zu sehen, dass  $i_2 = i_1$  ist.

**Satz 9.3.** *In einer Gamma-II Vierpolkette mit identischen Widerständen gilt für alle  $n \geq 1$ :*

$$i_n = F_n i_1. \quad (9.6)$$

*Beweis.* Aufgrund der Rekursionsgleichung (9.5) bilden die Ströme eine allgemeine Fibonacci-Folge mit den Anfangsbedingungen  $G_1 = i_1$  und  $G_2 = i_1$ . Nach Korollar 5.5 gilt also:  $i_n = G_n = F_{n-2}i_1 + F_{n-1}i_1$  und damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 9.4.** Für die Spannungen an den Widerständen gilt mit dem Ohmschen Gesetz:

$$u_n = F_n R i_1. \quad (9.7)$$

Somit gilt auch für die Spannungen das Rekursionsgesetz  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$  für  $n \geq 2$  und die Anfangsbedingungen  $u_1 = u_2 = R i_1$ .

# Zusammenfassung

Im Verlauf dieser Arbeit wurden viele Aspekte der Fibonacci-Zahlen betrachtet. Kurz umrissen wurde die Entstehungsgeschichte von der Entdeckung Anfang des 13. Jahrhunderts bis zu ersten systematischen Untersuchung durch Lucas gegen Ende des 19. Jahrhunderts dargestellt.

Auf dem Gebiet der Mathematik wurden erst grundlegende Eigenschaften untersucht, die die Basis für weitere Betrachtungen bildeten. Dazu gehört vor allem die enge Beziehung der Fibonacci-Zahlen zum Goldenen Schnitt und die Verallgemeinerung zu Folgen mit anderen Startwerten unter Beibehaltung der Rekursionsvorschrift. Dabei wurden Folgen mit mehrstufiger und parametrisierter Rekursion außer Acht gelassen.

Neben einigen Anwendungen aus dem Bereich der Algebra und Kombinatorik konnte im sechsten Kapitel der Blick aus algebraischer Sicht auf die Fibonacci-Zahlen vertieft werden, indem die Fibonacci-Algebra untersucht wurde. Dabei wurde der Zusammenhang zwischen der Fibonacci-Folge und dem Goldenen Schnitt weiter verdeutlicht: Der Goldene Schnitt ist aus algebraischer Sicht gewissermaßen das *Fibonacci-Prinzip*. Dies wurde z. B. daran deutlich, dass die Fibonacci-Matrix und der Goldene Schnitt gleiche algebraische Eigenschaften besitzen. Es sind beide Lösungen der Gleichung  $X^2 - X - 1 = 0$ . An der Fibonacci-Matrix wurde auch die Sonderstellung der Fibonacci-Folge unter den allgemeinen Fibonacci-Folgen deutlich, da ihre Einträge Fibonacci-Zahlen sind.

Im siebten Kapitel wurde eine effiziente Methode zur Approximation eines Minimums einer konvexen Funktion vorgestellt, die den Goldenen Schnitt bzw. in einer praktikableren Variante die Fibonacci-Zahlen verwendet. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wurde die Beziehung einer Teilklasse der allgemeinen Fibonacci-Folgen zu den Hyperbelfunktionen untersucht und eine Interpolationsfunktion für die Fibonacci-Zahlen hergeleitet.

Im achten Kapitel wurden einige geometrische Konstruktionsverfahren für den Goldenen Schnitt und sein Auftreten am Pentagon besprochen, dabei konnte noch die Beziehung zwischen dem Goldenen Schnitt und der Kreisconstanten  $\pi$  gestreift werden.

Auch außerhalb der Mathematik treten die Fibonacci-Zahlen in Erscheinung. Zwei dieser Erscheinungen aus Biologie und Elektrotechnik wurden im letzten Kapitel untersucht. Vor allem in Bereichen außerhalb rein mathematischer Betrachtung gibt es zahlreiche Hypothesen über das zu Tage tretende der Fibonacci-Zahlen und besonders des Goldenen Schnittes. Vieles davon ist eher spekulativen Charakters und konnte hier nicht erwähnt werden.

Die Fibonacci-Zahlen sind natürlich nicht in dem Sinne ubiquitär, dass kein Problem der Mathematik ohne sie gelöst werden könnte, oder sie im täglichen Leben unabdingbar wären, trotzdem ist es erstaunlich, in wievielen unterschiedlichen Bereichen – nicht nur der Mathematik – sie in Erscheinung treten.

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Teilung einer Strecke im Goldenen Schnitt . . . . .	12
6.1	Einfache Baumstruktur . . . . .	28
6.2	Fibonacci-Baum . . . . .	30
6.3	Minimaler AVL-Baum . . . . .	33
6.4	Additionsbaum der allgemeinen Fibonacci-Zahlen . . . . .	35
6.5	Pascalsches Dreieck . . . . .	47
7.1	Goldene-Schnitt-Suche . . . . .	52
7.2	Die Fibonacci-Funktion (beschränkt auf $\mathbb{R}$ ) . . . . .	57
7.3	Die Fibonacci-Funktion (Absolutbetrag) . . . . .	58
8.1	Konstruktion des Goldenen Schnittes . . . . .	59
8.2	Konstruktion des Goldenen Schnittes . . . . .	60
8.3	Goldenes Dreieck . . . . .	61
8.4	Konstruktion des Fünfecks . . . . .	63
8.5	Fünfeck mit Pentagramm . . . . .	64
8.6	Geometrischer Trugschluss . . . . .	65
9.1	Phyllotaxis: Zellanordnung . . . . .	70
9.2	Gamma-II Vierpolkette . . . . .	72

# Literaturverzeichnis

- [Antoniadis 1985] ANTONIADIS, J.A.: Generalized Fibonacci Numbers and Some Diophantine Equations. In: *Fibonacci Quarterly* 23 (1985), Nr. 3, S. 199 – 213
- [Becker 1997] BECKER, Michael: *Fibonacci-Zahlen*. 1997. – <http://www.ijon.de/mathe/fibonacci/fibo.ps.gz> (23. 7. 2004)
- [Beutelspacher 1988] BEUTELSPACHER, Albrecht ; PETRI, Bernhard: *Der Goldene Schnitt*. Mannheim; Wien; Zürich : BI Wissenschaftsverlag, 1988
- [Brown ] BROWN, Kevin (Hrsg.): *Recurrences and Pell Equations*. – <http://www.mathpages.com/home/kmath243.htm> 9. 10. 2004
- [Conway, John H. und Guy, Richard K. 1997] CONWAY, JOHN H. ; GUY, RICHARD K.: *Zahlenzauber. Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen*. Basel : Birkhäuser, 1997
- [Coxeter 1961] COXETER, H. S. M.: *Introduction to Geometry*. 2. Aufl. New York : Wiley, 1961
- [DeLeon 1981] DELEON, M. J.: A Characterization of the Fundamental Solutions to Pell's Equation  $u^2 - Dv^2 = C$ . In: *Fibonacci Quarterly* 19 (1981), Nr. 1
- [DudInf 1993] *Duden. Informatik*. 2. Aufl. Mannheim : Dudenverlag, 1993
- [Dunlap 1997] DUNLAP, Richard A.: *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. New Jersey : Wordl Scientific, 1997
- [Emerson 1969] EMERSON, E. I.: Recurrent Sequences in the Equation  $DQ^2 = R^2 + N$ . In: *Fibonacci Quarterly* 7 (1969), Nr. 3, S. 231 – 242

- [FAZ 2003] FAZ: Elliott-Wellen und der Goldene Schnitt. In: *Frankfurter Allgemeine Zeitung* (2003), Nr. 56, S. 21
- [Gottwald u. a. 1995] GOTTWALD, Siegfried (Hrsg.) ; KÄSTNER, Herbert (Hrsg.) ; RUDOLPH, Helmut (Hrsg.): *Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik*. Mannheim : Meyers Lexikonverlag, 1995
- [Gütig und Dieker 2003] GÜTIG, Ralf H. ; DIEKER, Stefan: *Datenstrukturen und Algorithmen*. 2. Aufl. Stuttgart : Teubner, 2003 (Leitfäden der Informatik)
- [Humenberger 2000] HUMENBERGER, Hans: Kopf-Adler-Muster in Münzwurfserien, unendliche Reihen und Fibonacci-Zahlen. In: *Stochastik in der Schule* 20 (2000), Nr. 3, S. 15 – 22
- [Kepler 1939] KEPLER, Johannes: *Weltharmonik*. München : Oldenbourg, 1939. – Übersetzt und eingeleitet von Max Caspar
- [Lahr 1981] LAHR, Joseph: *Theorie elektrischer Leitungen unter Anwendung und Erweiterung der Fibonacci-Funktion*, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Dissertation, 1981
- [Lind 1968] LIND, D. A.: The Quadratic Field  $Q(\sqrt{5})$  and a Certain Diophantine Equation. In: *Fibonacci Quarterly* 6 (1968), Nr. 3, S. 86 – 93
- [Lucas 1877] LUCAS, Édouard: Recherches sur plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure. In: *Bulletino di Bibliografia* (1877)
- [Lüneburg 1993] LÜNEBURG, Heinz: *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Le-severgnügen eines Mathematikers*. 2. überarb. Aufl. Mannheim : Wissenschaftsverlag, 1993
- [Pisano 2002] PISANO, Leonardo: *Liber Abaci*. New York : Springer, 2002. – Übersetzt ins Englische von Laurence Sigler
- [Scheja und Storch 1988] SCHEJA, Günther ; STORCH, Uwe: *Lehrbuch der Algebra. Teil 2*. Stuttgart : Teubner, 1988
- [Scheja und Storch 1994] SCHEJA, Günther ; STORCH, Uwe: *Lehrbuch der Algebra. Teil 1*. 2. Aufl. Stuttgart : Teubner, 1994

- [Seltzer 2000] SELTZER, Scott: *Generalized Fibonacci Sequences Modulo Powers of a Prime*. 2000. – <http://www.cs.brandeis.edu/~ira/47a/papers/seltzer.pdf> 13. 10. 2004
- [Stewart 1998] STEWART, Ian: *Die Zahlen der Natur. Mathematik als Fenster zur Welt*. Heidelberg : Spektrum, 1998
- [Storch und Wiebe 1996] STORCH, Uwe ; WIEBE, Hartmut: *Lehrbuch der Mathematik*. Bd. 1. Analysis einer Veränderlichen. 2. Aufl. Heidelberg : Spektrum, 1996
- [Tropfke 1940] TROPFKE, Johannes: *Geschichte der Elementar-Mathematik*. Bd. 4. 3. Aufl. Berlin : de Gruyter, 1940
- [Vajda 1989] VAJDA, S.: *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications*. Chichester : Ellis Horwood L, 1989 (Mathematics and its Applications)
- [Vorob'ev 1961] VOROB'EV, N. N.: *Popular Lectures in Mathematics*. Bd. 2: *Fibonacci Numbers*. Oxford : Pergamon, 1961
- [Wall 1960] WALL, D. D.: Fibonacci Series Modulo  $m$ . In: *The American Mathematical Monthly* 67 (1960), S. 525 – 532
- [Wikipedia ] WIKIPEDIA (Hrsg.): *Wikipedia. Die freie Enzyklopädie*. <http://de.wikipedia.org/wiki/>